



前缀和与差分

河南省实验中
学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

2026年01月23日



【引例】区间求和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

【题目描述】

给定一个长度为 n 的整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，有 m 次询问：求区间 $[l, r]$ 的所有元素 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 的和。

【输入格式】

第 1 行一个整数 $n(n \leq 10^6)$ ，表示序列的长度。

第 2 行有 n 的整数，表示整数序列 $(-10^9 \leq a_i \leq 10^9)$ 。

第 3 行一个整数 $m(m \leq 10^6)$ ，表示询问的次数。

接下来 m 行，每行两个整数 $l, r(1 \leq l \leq r \leq n)$ ，表示询问 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 的和。

【输出格式】

输出共 m 行，每行一个整数表示询问的区间和。

【样例输入】

```
8
2 3 4 7 8 9 10 5
5
2 3
4 7
1 3
7 7
7 8
```

【样例输出】

```
7
34
9
10
15
```



【引例】区间求和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 对于每个询问，循环累加 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 即可。

```
1 while(m--){  
2     int l, r; cin >> l >> r;  
3     long long sum = 0;  
4     for(int i = l; i <= r; ++i) sum += a[i];  
5     cout << sum << "\n";  
6 }  
7 }
```

- 每次询问时间复杂度为 $O(N)$ ，整体时间复杂度 $O(NM)$ 。



前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 给定一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 定义前缀和为 a 的前 i 项和 $s_i = \sum_{j=1}^i a_j$ 。
- 则序列 a 的区间 $[l, r]$ 的所有元素的和, 可以由前 r 项和 s_r 减去前 $l-1$ 项和 s_{l-1} 来表示, 即 $s(l, r) = \sum_{j=l}^r a_j = s_r - s_{l-1}$ 。
- 那么对于区间求和的询问, 程序修改如下:

```
1 while(m--){  
2     int l, r; cin >> l >> r;  
3     cout << s[r] - s[l - 1] << "\n";  
4 }  
5 }
```

时间复杂度降低为 $O(M)$ 。



前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 根据前缀和的定义显然有 $s_i = s_{i-1} + a_i$ ，根据该式可以递推求解前缀和。

```
1 int n; cin >> n;
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) cin >> a[i];
3 for(int i = 1; i <= n; ++i) s[i] = s[i - 1] + a[i];
```

- 对于部分题目，只需要前缀和，原始数组不再使用，可以直接在原数组的基础上累和。

```
1 int n; cin >> n;
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) cin >> s[i], s[i] += s[i - 1];
```

如果需要使用原数组的数 a_i ，可以用 $s_i - s_{i-1}$ 获取。

- 如果要一边修改元素的值，一边求区间和，能否使用前缀和？



二维前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

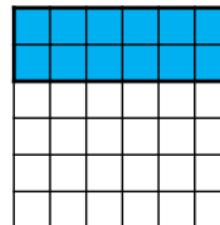
激光炸弹

IncDec Sequence

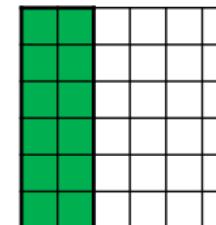
Tallest Cow

练习

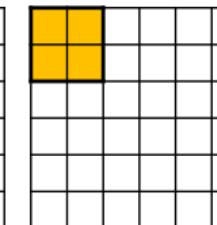
- 给定一个二维序列 $a_{1 \sim m, 1 \sim n}$, 定义前缀和为 a 的前 i 行的前 j 列的数字的和: $s_{i,j} = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j a_{x,y}$ 。
- 那么对于部分区域和 $a_{p,q} \rightarrow a_{x,y}$, 也可以表示为前缀和的形式:
$$\sum_{i=p}^x \sum_{j=q}^y a_{i,j} = s_{x,y} - s_{p-1,y} - s_{x,q-1} + s_{p-1,q-1}$$



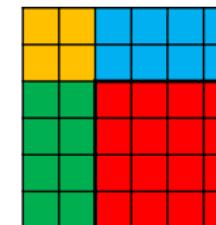
$s[p - 1, y]$



$s[x, q - 1]$



$s[p - 1, q - 1]$



$a[p][q] \sim a[x][y]$



二维前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

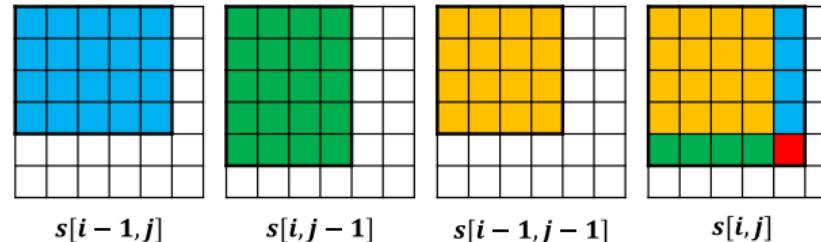
激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 根据定义显然有 $s_{i,j} = s_{i-1,j} + s_{i,j-1} - s_{i-1,j-1} + a_{i,j}$ ，根据该式可以递推求解前缀和。



```
1 for(int i = 1; i <= m; ++i)
2     for(int j = 1; j <= n; ++j)
3         s[i][j] = s[i - 1][j] + s[i][j - 1] - s[i - 1][j - 1] + a[i][j];
```

- 上述递推推广到三维、多维前缀和，如何处理？



二维前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 考虑如下分层递推的方式：

```
1 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] = a[i][j];  
2 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] += s[i - 1][j];  
3 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] += s[i][j - 1];
```

- 如果需要更高维度的前缀和，只需要多写几次分层递推即可，比使用容斥原理推导实现略简单。



前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

【引例】区间修改

【题目描述】

给定一个长度为 n 的整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 有 m 个操作: 将区间 $[l, r]$ 的所有元素 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 加上一个值。

【输入格式】

第 1 行一个整数 $n(n \leq 10^6)$, 表示序列的长度。

第 2 行有 n 的整数, 表示整数序列 $(-10^9 \leq a_i \leq 10^9)$ 。

第 3 行一个整数 $m(m \leq 10^6)$, 表示操作的次数。

接下来 m 行, 每行三个整数 $l, r(1 \leq l \leq r \leq n), -10^9 \leq x \leq 10^9$, 表示将 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 都加上 x 。

【输出格式】

输出一行 n 个数, 表示所有操作完成后, 序列的元素。

【样例输入】

```
8
2 3 4 7 8 9 10 6
5
2 5 1
4 6 -1
1 3 10
7 7 0
7 8 -8
```

【样例输出】

```
12 14 15 7 8 8 2 -2
```



【引例】区间修改

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 对于每个操作，循环将 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 加上 x 即可。

```
1 while(m--){  
2     int l, r; cin >> l >> r;  
3     for(int i = l; i <= r; ++i) a[i] += x;  
4 }  
5 }
```

- 每次操作时间复杂度为 $O(N)$ ，整体时间复杂度 $O(NM)$ 。



差分

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 给定一个长度为 n 的序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 定义它的差分序列 b_1, b_2, \dots, b_n 为:

$$b_1 = a_1, b_i = a_i - a_{i-1} (2 \leq i \leq n)$$

- 将原序列 a 的区间 $[l, r]$ 所有元素加 d 等价于其差分序列 b 的变化为 $b[l]$ 加 d , $b[r+1]$ 减 d 。
- 前缀和和差分互为逆运算, 差分序列 b 的前缀和就是原序列 a , 前缀和序列 s 的差分序列是原序列 a 。
- 那么对于区间修改的操作, 程序修改如下:

```
1 for(int i = 1; i <= n; ++i) b[i] = a[i] - a[i - 1];
2 while(m--)
3 {
4     int l, r; cin >> l >> r;
5     b[l] += x, b[r + 1] -= x;
6 }
7 for(int i = 1; i <= n; ++i) a[i] = a[i - 1] + b[i]; // 差分序列的前缀和
```

时间复杂度降低为 $O(M)$ 。

- 二维差分如何定义和计算?



【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

【题目描述】

给定一个整数序列 $a[1 \sim n]$ ，求出它的最大子序列和，即找出 $1 \leq i \leq j \leq n$ ，使得 $a[i] + a[i + 1] + \dots + a[j]$ 最大。

【输入格式】

第一行一个整数 n ，表示序列的长度。

第二行有 n 个整数，保证 $-32762 \leq a[i] \leq 32767$ 。

【输出格式】

一行一个整数，表示最大子序列和。

【样例输入】

```
5
-2 2 5 -1 6
```

【样例输出】

```
12
```

【数据范围】

对于 30% 的数据， $n \leq 100$ ；

对于 60% 的数据， $n \leq 400$ ；

对于 100% 的数据， $n \leq 10^6$ 。



【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 显然，可以枚举子序列的起点和终点，找到所有子序列和的最大值。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 for(int i = 1; i <= n; ++i)
3 {
4     for(int j = i; j <= n; ++j)
5     {
6         long long sum = 0;
7         for(int k = i; k <= j; ++k) sum += a[k];
8         ans = max(ans, sum);
9     }
10 }
11 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N^3)$ 。



【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 因为多次求解区间元素的和，可以利用前缀和来加快求解速度。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 for(int i = 1; i <= n; ++i)
3     for(int j = i; j <= n; ++j)
4         ans = max(ans, s[j] - s[i - 1]);
5 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N^2)$ 。



【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 对于确定的子序列终点 j ，若想使得 $s[j] - s[i](0 \leq i \leq j - 1)$ 最大，那么 $s[i]$ 应当尽可能的小，而每次我们只枚举一个前缀和，所以当枚举到 j 时，可以动态维护 $s[0] \sim s[j - 1]$ 的最小值。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 int i = 0; // 前缀和最小的下标
3 for(int j = 1; j <= n; ++j)
4 {
5     ans = max(ans, s[j] - s[i]);
6     if(s[j] < s[i]) i = j; // 维护最小前缀和
7 }
8 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N)$ 。



【例】激光炸弹

前缀和与差分

河南省实验中学
信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

【题目描述】

一种新型的激光炸弹，可以摧毁一个边长为 R 的正方形内的所有的目标。现在地图上有 $n(n \leq 10^4)$ 个目标，用整数 x_i, y_i (其值在 $[0, 5000]$) 表示目标在地图上的位置，每个目标都有一个价值。激光炸弹的投放是通过卫星定位的，但其有一个缺点，就是其爆破范围，即那个边长为 R 的正方形的边必须和 x, y 轴平行。若目标位于爆破正方形的边上，该目标将不会被摧毁。求一颗炸弹最多能炸掉地图上总价值为多少的目标。

【输入格式】

第一行 2 个整数 n, R 。

接下来 n 行，每行三个整数 x, y, v 分别表示目标的位置和价值。

【输出格式】

一行一个整数，表示炸掉的最大价值 (答案不会超过 32767)。

【样例输入】

```
2 1
0 0 1
1 1 1
```

【样例输出】

```
1
```



【例】激光炸弹

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 因为要多次查询边长为 R 的正方形内的目标价值和，故而考虑使用二维前缀和。
- 枚举边长为 R 的正方形，然后利用前缀和求解正方形内的目标价值。
- 注意 1：坐标包括第 0 行和第 0 列，为了方便将坐标统统向右下角移动。
- 注意 2：正方形边上的目标不算在内，为了方便要求边长为 R 的正方形的坐标不能为整数。

```
1 const int M = 5001; // 地图的最大位置 将原坐标整体向右下移动。
2 int ans = 0;
3 for(int i = R; i <= M; ++i)
4     for(int j = R; j <= M; ++j)
5     {
6         int p = i - R + 1, q = j - R + 1;
7         ans = max(ans, s[i][j] - s[p - 1][j] - s[i][q - 1] + s[p - 1][q - 1]);
8     }
9 cout << ans;
```



【例】IncDec Sequence

前缀和与差分

河南省实验中学
信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

【题目描述】

给定一个长度为 n 的序列 $a[1 \sim n]$ ，每次可以选择一个区间 $[l, r]$ ，使得区间内的所有数都加 1 或减 1。求至少需要多少次操作才能使数列中所有的数都一样，并求出保证最少次数的前提下，最终得到的数列可能有多少种。

【输入格式】

第一行一个正整数 $n (1 \leq n \leq 10^5)$ 。

接下来一行 n 个整数 $a[1 \sim n]$ 。

【输出格式】

第一行一个整数表示最少操作次数。

第二行输出最终能得到多少种结果。

【样例输入】

```
4
1 1 2 2
```

【样例输出】

```
1
2
```



【例】IncDec Sequence

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹

IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 将区间 $[l, r]$ 的数加 1 或减 1，可以用差分来快速处理。
- 如果想让所有的数都一样，那么 b_2, b_3, \dots, b_n 都变为 0，最终的序列 $a_i = b_1$ 。
- 每次操作相当于对差分的一个位置加 1，另一个位置减 1，如果操作总次数最少，那么一定按照如下顺序：
 - 选择 b_i 和 b_j ，其中 $2 \leq i, j \leq n$ ，保证一正一负。
 - 选择 b_1 和 b_j ，其中 $2 \leq j \leq n$ ，或者选择 b_j 和 b_{n+1} ，其中 $2 \leq j \leq n$ 。
- 设 b_2, b_3, \dots, b_n 中正数总和为 p ，负数总和的绝对值为 q 。
 - 首先，按照第 1 种方式，需操作 $\min(p, q)$ 次。
 - 然后剩余 $|p - q|$ 个未配对，可以选择与 b_1 或 b_{n+1} 配对，需操作 $|p - q|$ 次。
 - 所以，最少操作次数为 $\min(p, q) + |p - q| = \max(p, q)$ 次。
- 最终序列的值取决于操作结束后 b_1 的值，根据剩余 $|p - q|$ 次操作情况，能产生 $|p - q| + 1$ 种不同的 b_1 。



【例】Tallest Cow

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

【题目描述】

有 n 头牛站成一行，他们被编号为 $1 \sim n$ ，每头牛的身高都为整数。两头牛能看到对方，当且仅当两头牛中间的牛身高都比它们矮。现在，我们只知道其中最高的牛是第 k 头，它的身高是 H ，剩余牛的身高未知。但是，我们还知道这群牛之中存在着 m 对关系，每对关系都指明了某两头牛 x 和 y 可以相互看见。求每头牛的身高的最大可能值是多少。

【输入格式】

第一行四个整数 $n, k, H, m (1 \leq n, m \leq 10^4, 1 \leq H \leq 10^6)$ 。

接下来 m 行，每行两个整数 x, y ，表示 x 和 y 可以互相看见。

【输出格式】

一行 n 个整数，表示 n 头牛身高的最大可能值。

【样例输入】

```
9 3 5 5
1 3
5 3
4 3
3 7
9 8
```

【样例输出】

```
5 4 5 3 4 4 5 5 5
```



【例】Tallest Cow

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 如果没有限制，每头牛的身高均为 H ，若有关系指明 x 和 y 可以相互看见，那么 x 和 y 中间的牛 $x+1 \sim y-1$ 身高至少比他们小 1，那么就让这些牛的身高都减去 1。
- 定义 a 表示牛的身高，开始时均为 H ，那么对于每对关系，需要让 a_{x+1}, \dots, a_{y-1} 都减 1。
- 定义 b 作为 a 的差分，那么将 a 的区间修改转化为 $b[x+1]$ 减 1， $b[y]$ 加 1。
- 所有关系都处理完成后，求 b 的前缀和即为 a 。



练习

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 求和问题 (COGS 36)
- 水壶 [NOI Online2020 3rd](COGS 3411)
- 单子序列最大和 (COGS 82)
- 子段和问题 (COGS 3980)
- 零落尘 (COGS 3978)
- 激光炸弹 (COGS 2982)
- 最大正方形 (COGS 3245)



练习

前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

概念

前缀和
差分

例题

单子序列最大和
激光炸弹
IncDec Sequence
Tallest Cow

练习

- 区间修改 (COGS 1627)
- IncDec Sequence(COGS 2553)
- Tallest Cow(COGS 181)
- 新式武器 (COGS 3968)
- 焰硝庭火 (COGS 3895)
- 金发姑娘和 N 头牛 (COGS 1435)
- 聪明的质检员 [NOIP 2011](COGS 631)
- 借教室 [NOIP 2012](COGS 1266)
- Brownie Slicing G(COGS 532)