



前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

# 前缀和与差分

河南省实验中学信息技术组

2026 年 01 月 23 日



## 【引例】区间求和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹  
IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

给定一个长度为  $n$  的整数序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，有  $m$  次询问：求区间  $[l, r]$  的所有元素  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  的和。

### 【输入格式】

第 1 行一个整数  $n (n \leq 10^6)$ ，表示序列的长度。

第 2 行有  $n$  的整数，表示整数序列  $(-10^9 \leq a_i \leq 10^9)$ 。

第 3 行一个整数  $m (m \leq 10^6)$ ，表示询问的次数。

接下来  $m$  行，每行两个整数  $l, r (1 \leq l \leq r \leq n)$ ，表示询问  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  的和。

### 【输出格式】

输出共  $m$  行，每行一个整数表示询问的区间和。

### 【样例输入】

```
8
2 3 4 7 8 9 10 5
5
2 3
4 7
1 3
7 7
7 8
```

### 【样例输出】

```
7
34
9
10
15
```



## 【引例】区间求和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 对于每个询问，循环累加  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  即可。

```
1 while(m--)  
2 {  
3     int l, r; cin >> l >> r;  
4     long long sum = 0;  
5     for(int i = l; i <= r; ++i) sum += a[i];  
6     cout << sum << "\n";  
7 }
```

- 每次询问时间复杂度为  $O(N)$ ，整体时间复杂度  $O(NM)$ 。



# 前缀和

## 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 给定一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，定义前缀和为  $a$  的前  $i$  项和  $s_i = \sum_{j=1}^i a_j$ 。
- 则序列  $a$  的区间  $[l, r]$  的所有元素的和，可以由前  $r$  项和  $s_r$  减去前  $l-1$  项和  $s_{l-1}$  来表示，即  $s(l, r) = \sum_{j=l}^r a_j = s_r - s_{l-1}$ 。
- 那么对于区间求和的询问，程序修改如下：

```
1 while(m--)  
2 {  
3     int l, r; cin >> l >> r;  
4     cout << s[r] - s[l - 1] << "\n";  
5 }
```

时间复杂度降低为  $O(M)$ 。



# 前缀和

## 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 根据前缀和的定义显然有  $s_i = s_{i-1} + a_i$ ，根据该式可以递推求解前缀和。

```
1 int n; cin >> n;  
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) cin >> a[i];  
3 for(int i = 1; i <= n; ++i) s[i] = s[i - 1] + a[i];
```

- 对于部分题目，只需要前缀和，原始数组不再使用，可以直接在原数组的基础上累和。

```
1 int n; cin >> n;  
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) cin >> s[i], s[i] += s[i - 1];
```

如果需要使用原数组的数  $a_i$ ，可以用  $s_i - s_{i-1}$  获取。

- 如果要一边修改元素的值，一边求区间和，能否使用前缀和？



## 二维前缀和

### 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

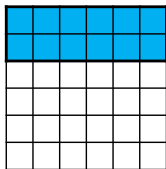
激光炸弹

IncDec Sequence

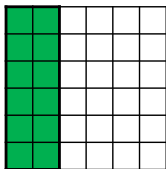
Tallest Cow

### 练习

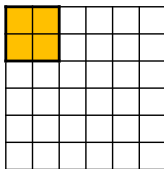
- 给定一个二维序列  $a_{1 \sim m, 1 \sim n}$ ，定义前缀和为  $a$  的前  $i$  行的前  $j$  列的数字的和：
$$s_{i,j} = \sum_{x=1}^i \sum_{y=1}^j a_{x,y} \circ$$
- 那么对于部分区域和  $a_{p,q} \rightarrow a_{x,y}$ ，也可以表示为前缀和的形式：
$$\sum_{i=p}^x \sum_{j=q}^y a_{i,j} = s_{x,y} - s_{p-1,y} - s_{x,q-1} + s_{p-1,q-1} \circ$$



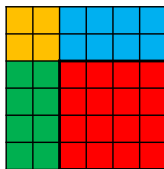
$s[p-1, y]$



$s[x, q-1]$



$s[p-1, q-1]$



$a[p][q] \sim a[x][y]$



## 二维前缀和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

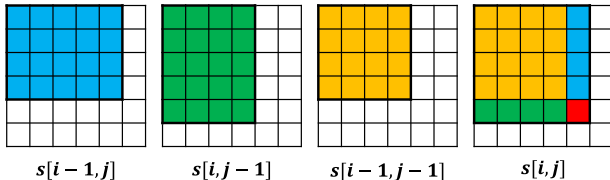
激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 根据定义显然有  $s_{i,j} = s_{i-1,j} + s_{i,j-1} - s_{i-1,j-1} + a_{i,j}$ , 根据该式可以递推求解前缀和。



```
1 for(int i = 1; i <= m; ++i)
2   for(int j = 1; j <= n; ++j)
3     s[i][j] = s[i - 1][j] + s[i][j - 1] - s[i - 1][j - 1] + a[i][j];
```

- 上述递推推广到三维、多维前缀和，如何处理？



## 二维前缀和

### 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 考虑如下分层递推的方式：

```
1 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] = a[i][j];  
2 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] += s[i - 1][j];  
3 for(int i = 1; i <= m; ++i) for(int j = 1; j <= n; ++j) s[i][j] += s[i][j - 1];
```

- 如果需要更高维度的前缀和，只需要多写几次分层递推即可，比使用容斥原理推导实现略简单。





## 【引例】区间修改

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹  
IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

给定一个长度为  $n$  的整数序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，有  $m$  个操作：将区间  $[l, r]$  的所有元素  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  加上一个值。

### 【输入格式】

第 1 行一个整数  $n$  ( $n \leq 10^6$ )，表示序列的长度。

第 2 行有  $n$  的整数，表示整数序列 ( $-10^9 \leq a_i \leq 10^9$ )。

第 3 行一个整数  $m$  ( $m \leq 10^6$ )，表示操作的次数。

接下来  $m$  行，每行三个整数  $l, r$  ( $1 \leq l \leq r \leq n$ ),  $-10^9 \leq x \leq 10^9$ ，表示将  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  都加上  $x$ 。

### 【输出格式】

输出一行  $n$  个数，表示所有操作完成后，序列的元素。

### 【样例输入】

```
8
2 3 4 7 8 9 10 6
5
2 5 1
4 6 -1
1 3 10
7 7 0
7 8 -8
```

### 【样例输出】

```
12 14 15 7 8 8 2 -2
```



## 【引例】区间修改

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 对于每个操作，循环将  $a_l, a_{l+1}, \dots, a_r$  加上  $x$  即可。

```
1 while(m--)  
2 {  
3     int l, r; cin >> l >> r;  
4     for(int i = l; i <= r; ++i) a[i] += x;  
5 }
```

- 每次操作时间复杂度为  $O(N)$ ，整体时间复杂度  $O(NM)$ 。



# 差分

## 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 给定一个长度为  $n$  的序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 定义它的差分序列  $b_1, b_2, \dots, b_n$  为:

$$b_1 = a_1, b_i = a_i - a_{i-1} (2 \leq i \leq n)$$

- 将原序列  $a$  的区间  $[l, r]$  所有元素加  $d$  等价于其差分序列  $b$  的变化为  $b[l]$  加  $d$ ,  $b[r+1]$  减  $d$ 。
- 前缀和和差分互为逆运算, 差分序列  $b$  的前缀和就是原序列  $a$ , 前缀和序列  $s$  的差分序列是原序列  $a$ 。
- 那么对于区间修改的操作, 程序修改如下:

```
1 for(int i = 1; i <= n; ++i) b[i] = a[i] - a[i - 1];
2 while(m--)
3 {
4     int l, r; cin >> l >> r;
5     b[l] += x, b[r + 1] -= x;
6 }
7 for(int i = 1; i <= n; ++i) a[i] = a[i - 1] + b[i]; // 差分序列的前缀和
```

时间复杂度降低为  $O(M)$ 。

- 二维差分如何定义和计算?



## 【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

给定一个整数序列  $a[1 \sim n]$ ，求出它的最大子序列和，即找出  $1 \leq i \leq j \leq n$ ，使得  $a[i] + a[i+1] + \dots + a[j]$  最大。

### 【输入格式】

第一行一个整数  $n$ ，表示序列的长度。

第二行有  $n$  个整数，保证  $-32762 \leq a[i] \leq 32767$ 。

### 【输出格式】

一行一个整数，表示最大子序列和。

### 【样例输入】

```
5
-2 2 5 -1 6
```

### 【样例输出】

```
12
```

### 【数据范围】

对于 30% 的数据， $n \leq 100$ ；

对于 60% 的数据， $n \leq 400$ ；

对于 100% 的数据， $n \leq 10^6$ 。



## 【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 显然，可以枚举子序列的起点和终点，找到所有子序列和的最大值。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 for(int i = 1; i <= n; ++i)
3 {
4     for(int j = i; j <= n; ++j)
5     {
6         long long sum = 0;
7         for(int k = i; k <= j; ++k) sum += a[k];
8         ans = max(ans, sum);
9     }
10 }
11 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N^3)$ 。



## 【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 因为多次求解区间元素的和，可以利用前缀和来加快求解速度。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 for(int i = 1; i <= n; ++i)
3     for(int j = i; j <= n; ++j)
4         ans = max(ans, s[j] - s[i - 1]);
5 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N^2)$ 。



## 【例】单子序列最大和

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹  
IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

- 对于确定的子序列终点  $j$ ，若想使得  $s[j] - s[i] (0 \leq i \leq j - 1)$  最大，那么  $s[i]$  应当尽可能的小，而每次我们只枚举一个前缀和，所以当枚举到  $j$  时，可以动态维护  $s[0] \sim s[j - 1]$  的最小值。

```
1 long long ans = -1e18; // 答案子序列和
2 int i = 0;           // 前缀和最小的下标
3 for(int j = 1; j <= n; ++j)
4 {
5     ans = max(ans, s[j] - s[i]);
6     if(s[j] < s[i]) i = j; // 维护最小前缀和
7 }
8 cout << ans;
```

- 时间复杂度： $O(N)$ 。



## 【例】激光炸弹

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

一种新型的激光炸弹，可以摧毁一个边长为  $R$  的正方形内的所有的目标。现在地图上有  $n$  ( $n \leq 10^4$ ) 个目标，用整数  $x_i, y_i$  (其值在  $[0, 5000]$ ) 表示目标在地图上的位置，每个目标都有一个价值。激光炸弹的投放是通过卫星定位的，但其有一个缺点，就是其爆破范围，即那个边长为  $R$  的正方形的边必须和  $x, y$  轴平行。若目标位于爆破正方形的边上，该目标将不会被摧毁。求一颗炸弹最多能炸掉地图上总价值为多少的目标。

### 【输入格式】

第一行 2 个整数  $n, R$ 。

接下来  $n$  行，每行三个整数  $x, y, v$  分别表示目标的位置和价值。

### 【输出格式】

一行一个整数，表示炸掉的最大价值 (答案不会超过 32767)。

### 【样例输入】

```
2 1
0 0 1
1 1 1
```

### 【样例输出】

```
1
```





## 【例】激光炸弹

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

- 因为要多次查询边长为  $R$  的正方形内的目标价值和，故而考虑使用二维前缀和。
- 枚举边长为  $R$  的正方形，然后利用前缀和求解正方形内的目标价值。
- 注意 1：坐标包括第 0 行和第 0 列，为了方便将坐标统向右下角移动。
- 注意 2：正方形边上的目标不算在内，为了方便要求边长为  $R$  的正方形的坐标不能为整数。

```
1 const int M = 5001; // 地图的最大位置 将原坐标整体向右下移动。
2 int ans = 0;
3 for(int i = R; i <= M; ++i)
4     for(int j = R; j <= M; ++j)
5     {
6         int p = i - R + 1, q = j - R + 1;
7         ans = max(ans, s[i][j] - s[p - 1][j] - s[i][q - 1] + s[p - 1][q - 1]);
8     }
9 cout << ans;
```



## 【例】IncDec Sequence

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和

差分

例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

给定一个长度为  $n$  的序列  $a[1 \sim n]$ ，每次可以选择一个区间  $[l, r]$ ，使得区间内的所有数都加 1 或减 1。求至少需要多少次操作才能使数列中所有的数都一样，并求出保证最少次数的前提下，最终得到的数列可能有多少种。

### 【输入格式】

第一行一个正整数  $n(1 \leq n \leq 10^5)$ 。

接下来一行  $n$  个整数  $a[1 \sim n]$ 。

### 【输出格式】

第一行一个整数表示最少操作次数。

第二行输出最终能得到多少种结果。

### 【样例输入】

```
4
1 1 2 2
```

### 【样例输出】

```
1
2
```



## 【例】IncDec Sequence

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹

IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

- 将区间  $[l, r]$  的数加 1 或减 1，可以用差分来快速处理。
- 如果想让所有的数都一样，那么  $b_2, b_3, \dots, b_n$  都变为 0，最终的序列  $a_i = b_1$ 。
- 每次操作相当于对差分的一个位置加 1，另一个位置减 1，如果操作总次数最少，那么一定按照如下顺序：
  - ① 选择  $b_i$  和  $b_j$ ，其中  $2 \leq i, j \leq n$ ，保证一正一负。
  - ② 选择  $b_1$  和  $b_j$ ，其中  $2 \leq j \leq n$ ，或者选择  $b_j$  和  $b_{n+1}$ ，其中  $2 \leq j \leq n$ 。
- 设  $b_2, b_3, \dots, b_n$  中正数总和为  $p$ ，负数总和的绝对值为  $q$ 。
  - 首先，按照第 1 种方式，需操作  $\min(p, q)$  次。
  - 然后剩余  $|p - q|$  个未配对，可以选择与  $b_1$  或  $b_{n+1}$  配对，需操作  $|p - q|$  次。
  - 所以，最少操作次数为  $\min(p, q) + |p - q| = \max(p, q)$  次。
- 最终序列的值取决于操作结束后  $b_1$  的值，根据剩余  $|p - q|$  次操作情况，能产生  $|p - q| + 1$  种不同的  $b_1$ 。



## 【例】Tallest Cow

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹  
IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

### 【题目描述】

有  $n$  头牛站成一行，他们被编号为  $1 \sim n$ ，每头牛的身高都为整数。两头牛能看到对方，当且仅当两头牛中间的牛身高都比它们矮。现在，我们只知道其中最高的牛是第  $k$  头，它的身高是  $H$ ，剩余牛的身高未知。但是，我们还知道这群牛之中存在着  $m$  对关系，每对关系都指明了某两头牛  $x$  和  $y$  可以相互看见。求每头牛的身高的最大可能值是多少。

### 【输入格式】

第一行四个整数  $n, k, H, m$  ( $1 \leq n, m \leq 10^4, 1 \leq H \leq 10^6$ )。

接下来  $m$  行，每行两个整数  $x, y$ ，表示  $x$  和  $y$  可以互相看见。

### 【输出格式】

一行  $n$  个整数，表示  $n$  头牛身高的最大可能值。

### 【样例输入】

```
9 3 5 5
1 3
5 3
4 3
3 7
9 8
```

### 【样例输出】

```
5 4 5 3 4 4 5 5 5
```



## 【例】Tallest Cow

前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

概念

前缀和  
差分

例题

单子序列最大和  
激光炸弹  
IncDec Sequence  
Tallest Cow

练习

- 如果没有限制，每头牛的身高均为  $H$ ，若有关系指明  $x$  和  $y$  可以相互看见，那么  $x$  和  $y$  中间的牛  $x+1 \sim y-1$  身高至少比他们小 1，那么就让这些牛的身高都减去 1。
- 定义  $a$  表示牛的身高，开始时均为  $H$ ，那么对于每对关系，需要让  $a_{x+1}, \dots, a_{y-1}$  都减 1。
- 定义  $b$  作为  $a$  的差分，那么将  $a$  的区间修改转化为  $b[x+1]$  减 1， $b[y]$  加 1。
- 所有关系都处理完成后，求  $b$  的前缀和即为  $a$ 。



# 练习

## 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 求和问题 (COGS 36)
- 水壶 [NOI Online2020 3rd](COGS 3411)
- 单子序列最大和 (COGS 82)
- 子段和问题 (COGS 3980)
- 零落尘 (COGS 3978)
- 激光炸弹 (COGS 2982)
- 最大正方形 (COGS 3245)



# 练习

## 前缀和与差分

河南省实验中学  
信息技术组

### 概念

前缀和

差分

### 例题

单子序列最大和

激光炸弹

IncDec Sequence

Tallest Cow

### 练习

- 区间修改 (COGS 1627)
- IncDec Sequence(COGS 2553)
- Tallest Cow(COGS 181)
- 新式武器 (COGS 3968)
- 焰硝庭火 (COGS 3895)
- 金发姑娘和 N 头牛 (COGS 1435)
- 聪明的质检员 [NOIP 2011](COGS 631)
- 借教室 [NOIP 2012](COGS 1266)
- Brownie Slicing G(COGS 532)