



## 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蓄栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

# 贪心题目选讲

河南省实验中学信息技术组

2026 年 01 月 27 日



# 知识回顾

## 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

## 贪心算法

### 例题

日光浴  
蓄栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

### 小结

### 练习

- 排序 (多关键字排序)
- 优先队列
- 贪心算法



# 最优化问题

## 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

## 贪心算法

### 例题

日光浴  
游艇预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

### 小结

### 练习

最优化问题的定义是：在给定的约束条件下，选择最优的参数和方案，来使得目标函数最优化 (最大化/最小化) 的问题。

- 可行解：满足约束条件的解。
- 最优解：满足约束条件并且使目标函数达到最优值的解。

求解最优化问题的算法有很多，例如枚举、搜索、贪心、动态规划等。



# 贪心算法

## 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

## 贪心算法

### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

### 小结

### 练习

- 贪心算法：每一步选择都采取当前状态下最优的选择，从而希望最终结果最优的算法。
- 在当前状态下做出的最优选择的方法被称之为贪心策略。
- 在贪心算法中，找到合适的贪心策略是解决问题的关键。



# 贪心算法的正确性

## 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

## 贪心算法

### 例题

日光浴  
蓄栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

### 小结

### 练习

证明贪心算法正确性的方法有：

- 能否举出反例
- 贪心选择性性质和最优子结构性性质 1
- 决策包容性
- 反证法
- 微扰 (邻项交换)
- 范围缩放



## 【例】日光浴

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
日程预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

### 【题目描述】

有  $C$  头奶牛进行日光浴，第  $i$  头奶牛需要  $\min SPF[i]$  到  $\max SPF[i]$  单位强度之间的阳光。

每头奶牛在日光浴前必须涂防晒霜，防晒霜有  $L$  种，涂上第  $i$  种之后，身体接收到的阳光强度就会稳定为  $SPF[i]$ ，第  $i$  种防晒霜有  $cover[i]$  瓶。求最多可以满足多少头奶牛进行日光浴。

### 【输入格式】

第一行输入整数  $C$  和  $L$  ( $C, L \leq 2500$ )。

接下来的  $C$  行，按次序每行输入一头牛的  $\min SPF$  和  $\max SPF$  值，即第  $i$  行输入  $\min SPF[i]$  和  $\max SPF[i]$  ( $1 \leq \min SPF[i] \leq \max SPF[i] \leq 1000$ )。

再接下来的  $L$  行，按次序每行输入一种防晒霜的  $SPF$  和  $cover$  值，即第  $i$  行输入  $SPF[i]$  ( $1 \leq SPF \leq 1000$ ) 和  $cover[i]$ 。

每行的数据之间用空格隔开。

### 【输出格式】

输出一个整数，代表最多可以满足奶牛日光浴的奶牛数目。



## 【例】日光浴

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【样例输入】

```
3 2
3 10
2 5
1 5
6 2
4 1
```

### 【样例输出】

```
2
```

### 【样例解释】

可以给第 1 头奶牛用防晒霜，将其  $SPF$  值固定为 6；可以给第 2 头奶牛用防晒霜，将其  $SPF$  值固定为 4。当然，也有其他使用防晒霜的方案。



## 【例】日光浴

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

日程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

- 按照  $\max SPF$  递增的顺序把奶牛排序，依次考虑每头奶牛。
- 对于每头奶牛，扫描一遍所有的防晒霜，在这头奶牛能用 (能用指的是该防晒霜的强度符合这头奶牛的范围，并且瓶数还有剩余) 的防晒霜里找  $SPF$  值最小的使用。
- 以上算法的贪心策略是在满足条件的前提下每次选  $SPF$  最小的防晒霜。这个策略为什么是正确的呢？每瓶防晒霜是否可用，会被  $\min SPF$  与  $\max SPF$  两个条件限制。因为奶牛已被按照  $\max SPF$  递增排序，所以留下较大的防晒霜可能可以让后续奶牛使用 (决策包容性)。
- 另外，每头奶牛对答案的贡献至多是 1。即使让当前这头奶牛放弃日光浴，留下防晒霜给后面的某一头奶牛用，对答案的贡献也不会变得更大。综上所述，尽量满足当前的奶牛，并选择  $SPF$  值尽量小的防晒霜是一个正确的贪心策略。





## 【例】畜栏预定

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

畜栏预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

登罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【题目描述】

有  $N$  头牛在畜栏中吃草。每个畜栏在同一时间段只能提供给一头牛吃草，所以可能会需要多个畜栏。给定  $N$  头牛和每头牛开始吃草的时间  $A$  以及结束吃草的时间  $B$ ，每头牛在  $[A, B]$  这一时间段内都会一直吃草。当两头牛的吃草区间存在交集时（包括端点），这两头牛不能被安排在同一个畜栏吃草。求需要的最小畜栏数目和每头牛对应的畜栏方案。

### 【输入格式】

第 1 行一个整数  $N(N \leq 5 \times 10^4)$ 。

接下来  $N$  行，每行两个整数  $A, B(1 \leq A \leq B \leq 10^6)$ ，表示每头牛吃草的开始和结束时间。

### 【输出格式】

第一行一个整数，表示需要的最少畜栏数。

接下来  $N$  行，第  $i$  行一个整数表示第  $i$  头牛被安排到的畜栏编号，编号是从 1 开始的连续整数。

方案可能有多解，输出其中一种即可。



## 【例】畜栏预定

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

畜栏预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【样例输入】

```
5
1 10
2 4
3 6
5 8
4 7
```

### 【样例输出】

```
4
1
2
3
2
4
```

### 【样例解释】

| 畜栏编号 | 奶牛顺序 |
|------|------|
| 1    | 1    |
| 2    | 2,4  |
| 3    | 3    |
| 4    | 5    |



## 【例】畜栏预定

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
畜栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

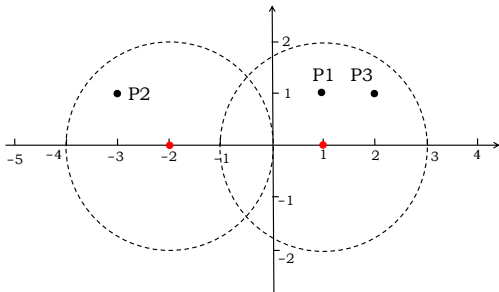
#### 练习

- 首先，按照牛的吃草开始时间从小到大排序。
- 排序后的第 1 头牛肯定要安排一个畜栏，但是对于后续的第  $i$  头牛，如果前面有畜栏的奶牛吃草结束时间早于这头牛，那么这头奶牛就可以被安排到对应畜栏，否则就需要新开畜栏。
- 需要维护当前已经安排好的畜栏，每次需要选择结束时间最早的畜栏，需要使用优先队列维护已经开设的畜栏。
- 注意要求输出的畜栏编号要按照排序前奶牛的顺序。



## 【例】监控安装

校长想通过监控设备覆盖学校内的  $n$  座建筑物，每座建筑物被视为一个点，在坐标系中给出坐标为  $(x, y)$ ，并且所有的建筑物都在  $x$  轴的上方。因为学校的供电和传输线路均沿  $x$  轴，所以监控设备只被允许建立在  $x$  轴上。每台监控设备的监控范围均为一个半径为  $R$  的圆，圆心即为监控设备。现在给出  $n$  座建筑物的坐标，问最少需要几台这样的设备可以实现对所有建筑物的监控？



贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习



## 【例】监控安装

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

日程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【输入格式】

第 1 行两个整数  $n, R (1 \leq n \leq 1000)$ 。

接下来  $n$  行，每行两个整数表示建筑物的坐标。

### 【输出格式】

一行一个整数表示最小需要安装的监控数，如果不能安装输出 -1。

### 【样例输入】

```
3 2
1 2
-3 1
2 1
```

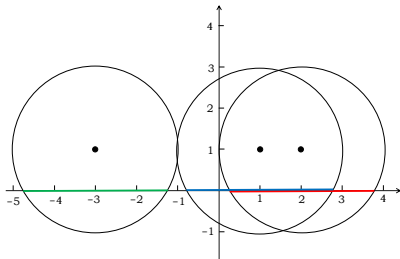
### 【样例输出】

```
2
```



## 【例】监控安装

此题从正面想很困难，那么我们换个角度：如果一个建筑物想被监控，那么监控设备必然在以建筑物为圆心半径为  $R$  的圆内，又因监控设备必须在  $x$  轴上，所以监控应该在圆与  $x$  轴相交的弦上。



所以，对于每一个建筑物，我们计算出  $x$  轴上能管辖它的区间  $[l, r]$ ，则原问题转换为：给定  $n$  个区间，在  $x$  轴上放置最少的点，使得每个区间包含至少一个点。这就是典型的区间选点问题。



## 【例】监控安装

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

盲约预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

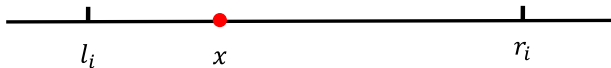
树染色

小结

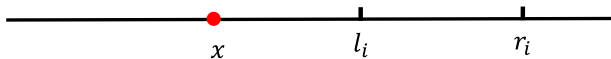
练习

- 将区间按照  $r_i$  从小到大排序 ( $r_i$  相同, 则按照  $l_i$  从大到小排)。
- 对于第 1 个区间, 应该将监控放在区间内的哪个点呢? 最后一个点。
- 对于第 1 个区间而言, 监控放在任意一个点都可以, 放在最后一个点可能能够监控后续的其他区间。
- 设当前已经放置的最右侧的监控为  $x$ , 那么对于一个新的区间  $[l_i, r_i]$ :

- 如果  $l_i \leq x$ , 则当前监控  $x$  可以监控区间  $[l_i, r_i]$ , 那么无需新建监控。



- 如果  $l_i > x$ , 则当前监控  $x$  无法监控区间  $[l_i, r_i]$ , 那么选择新建监控来监控  $[l_i, r_i]$ , 同理新建的监控坐标  $x = r_i$ 。



- 按照上述过程, 最后输出安放的设备数目即可。



## 【例】监控安装

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

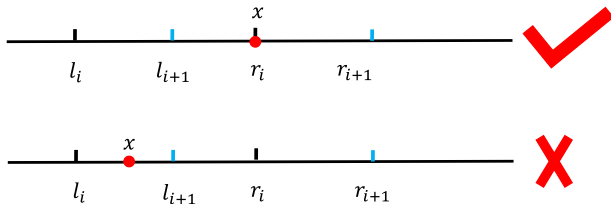
练习

这个贪心算法，我们用决策包容性来证明。对于每一个区间  $[l_i, r_i]$ ，我们有两个选择：

- ① 使用已经设置的监控设备。
- ② 新增一台监控设备。

我们使用的策略是，当选择①可行时，不会选择②。选择①之后，未来可以在任意一个位置新增监控设备；而选择②，则需要再在区间  $[l_i, r_i]$  之间新建设备，也就是说第①种选择比第②种选择的坐标范围更广。

其次，如果不得不进行选择②，那么将监控设备放在  $r_i$ ，未来可能覆盖后续区间（如下图）。







## 【例】超市

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

日程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【题目描述】

超市里有  $n$  件商品，每个商品都有利润  $p_i$  和过期时间  $d_i$ ，每天只能卖一件商品，过期商品 (在第  $k$  天,  $k > d_i$ ) 不能再卖。

求合理安排每天卖的商品的情况下，可以得到的最大收益是多少。

### 【输入格式】

第 1 行一个整数  $n(n \leq 10000)$ 。

接下来  $n$  行，每行两个整数表示商品的利润和过期时间 ( $1 \leq p_i, d_i \leq 10000$ )。

### 【输出格式】

一行一个整数表示最大收益值。

### 【样例输入】

```
7
20 1
2 1
10 3
100 2
8 2
5 20
50 10
```

### 【样例输出】

```
185
```



## 【例】超市

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
窗栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 贪心策略一
- 在保证不卖出过期商品的前提下，先卖价值高的商品。
- 将商品按照价值从大到小排序，对于商品  $i$ ：
  - 在  $1 \sim d_i$  中的任意一天卖出收益都是一样的，所以安排在第  $d_i$  天卖出；
  - 如果第  $d_i$  天已经有商品卖出了，那么就向前找出能卖商品的一天卖出。
- 时间复杂度： $O(ND)$ 。



## 【例】超市

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

窗框预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

- 贪心策略二
- 商品过期前能卖尽量卖，但是由于每天只能卖一件，而商品又特别多，所以第  $t$  天时，可能会有很多商品过期不能卖掉。所以，第  $t$  天时，在保证不卖出过期商品的前提下，尽量卖出利润前  $t$  大的商品。
- 把商品按照过期时间从小到大排序，然后依次处理每个商品。
- 为了始终维护利润前若干大的商品，建立一个最小堆来存储售卖的商品 (结点为利润)。
- 当处理到第  $i$  件商品时：
  - 如果  $d_i$  大于当前堆大小，那么直接将该商品的利润入堆 (过期前肯定有时间可以卖)。
  - 如果  $d_i$  等于当前堆大小，说明在目前方案中，前  $d_i$  天已经安排了  $d_i$  个商品卖出。此时，如果当前商品利润大于堆顶值 (已经安排的  $d_i$  个商品中的最低利润)，那么用当前商品的利润替换堆顶 (用当前商品替换掉原方案中利润最低的商品)。
- 堆内存储的即为要卖出商品的利润，堆中所有元素的和就是答案。

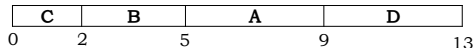


## 【例】带有截止时间的活动安排

给定  $n$  个任务，每个任务都有一个耗时和截止时间，如果该任务在截止时间前完成了，那么就可以得分，否则会被扣分，计分公式为  $d - x$ ，其中  $d$  为某任务的截止时间， $x$  为该任务的完成时刻。如何安排任务序列，使得最终的得分最高？

例如，对于下表中的活动，最优解为  $-10$ ，其中  $C$  得分为  $5$ ， $B$  得分为  $0$ ， $A$  得分为  $-7$ ， $D$  得分为  $-8$ 。

| 任务 | 耗时 | 截止时间 $d$ |
|----|----|----------|
| A  | 4  | 2        |
| B  | 3  | 5        |
| C  | 2  | 7        |
| D  | 4  | 5        |



图：最优解图示



## 【例】带有截止时间的任务安排

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

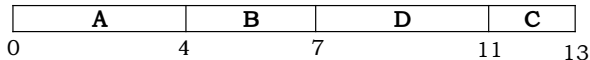
树染色

小结

练习

- 贪心策略一：优先选择截止时间早的任务。

| 任务  | 耗时 | 截止时间 | 活动结束时间 | 得分  |
|-----|----|------|--------|-----|
| A   | 4  | 2    | 4      | -2  |
| B   | 3  | 5    | 7      | -2  |
| D   | 4  | 5    | 11     | -6  |
| C   | 2  | 7    | 13     | -6  |
| 总得分 |    |      |        | -16 |



图：安排图示



## 【例】带有截止时间的任务安排

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

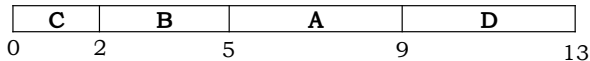
树染色

小结

练习

- 贪心策略二：优先选择耗时短的任务。

| 任务  | 耗时 | 截止时间 | 活动结束时间 | 得分  |
|-----|----|------|--------|-----|
| C   | 2  | 7    | 2      | 5   |
| B   | 3  | 5    | 5      | 0   |
| A   | 4  | 2    | 9      | -7  |
| D   | 4  | 5    | 13     | -8  |
| 总得分 |    |      |        | -10 |



图：安排图示



## 【例】带有截止时间的任务安排

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

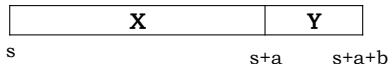
DZY Loves Physics

树染色

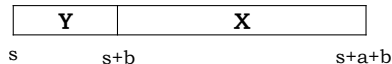
小结

练习

- 贪心策略二：优先选择耗时短的任务。



图：耗时短的在后



图：耗时短的在前

证明 (邻项微扰): 假设任务  $X$  的要求截止时间为  $d_x$ , 任务  $Y$  的要求截止时间为  $d_y$ , 则左图的得分 (其他任务的得分没有变, 此处省去) 为  $f_l = d_x - (s+a) + d_y - (s+a+b)$ , 右图的得分为  $f_r = d_y - (s+b) + d_x - (s+a+b)$ , 则  $f_l - f_r = b - a$ , 又因为  $a > b$ , 所以  $f_l - f_r = b - a < 0$ , 即  $f_l < f_r$ , 所以要先选择耗时较短的任务。



## 【例】国王游戏

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

恰逢 H 国国庆，国王邀请  $n$  位大臣来玩一个有奖游戏。首先，他让每个大臣在左、右手上面分别写下一个整数，国王自己也在左、右手上各写一个整数。然后，让这  $n$  位大臣排成一排，国王站在队伍的最前面。排好队后，所有的大臣都会获得国王奖赏的若干金币，每位大臣获得的金币数分别是：排在该大臣前面的所有人的左手上的数的乘积除以他自己右手上的数，然后向下取整得到的结果。

国王不希望某一个大臣获得特别多的奖赏，所以他想请你帮他重新安排一下队伍的顺序，使得获得奖赏最多的大臣，所获奖赏尽可能的少。注意，国王的位置始终在队伍的最前面。





## 【例】国王游戏

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

### 【输入格式】

第一行包含一个整数  $n$ ，表示大臣的人数。

第二行包含两个整数  $a$  和  $b$ ，之间用一个空格隔开，分别表示国王左手和右手上的整数。

接下来  $n$  行，每行包含两个整数  $a$  和  $b$ ，之间用一个空格隔开，分别表示每个大臣左手和右手上的整数。

### 【输出格式】

输出只有一行，包含一个整数，表示重新排列后的队伍中获奖赏最多的大臣所获得的金币数。

### 【数据范围】

对于 20% 的数据，有  $1 \leq n \leq 10, 1 \leq a, b \leq 8$ ；

对于 40% 的数据，有  $1 \leq n \leq 20, 1 \leq a, b \leq 8$ ；

对于 60% 的数据，有  $1 \leq n \leq 100$ ；

对于 60% 的数据，保证答案不超过  $10^9$ ；

对于 100% 的数据，有  $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq a, b \leq 10^5$ 。



## 【例】国王游戏

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

盲程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【样例输入】

```
3
1 1
2 3
7 4
4 6
```

### 【样例输出】

```
2
```

### 【样例解释】

按 1 2 3 号大臣这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 2；

按 1 3 2 这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 2；

按 2 1 3 这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 2；

按 2 3 1 这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 9；

按 3 1 2 这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 2；

按 3 2 1 这样排列队伍，获得奖赏最多的大臣所获得金币数为 9。

因此，奖赏最多的大臣最少获得 2 个金币，答案输出 2。



## 【例】国王游戏

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
**国王游戏**  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 按照左右手上的数的乘积升序排序，就是最优排队方案。
- 证明方法：邻项交换（微扰）
- 此处，证明方法其实就是贪心策略寻找的方法。



## 【例】国王游戏

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉

DZY Loves Physics  
树染色

小结

练习

我们交换两个相邻的大臣  $i$  和  $i + 1$ ，交换之前者两位大臣的奖励分别为：

$$\frac{a[1] \cdots a[i-1]}{b[i]} \quad \frac{a[1] \cdots a[i]}{b[i+1]}$$

交换之后两位大臣的奖励分别为：

$$\frac{a[1] \cdots a[i-1]}{b[i+1]} \quad \frac{a[1] \cdots a[i-1]a[i+1]}{b[i]}$$

其他大臣的奖励显然都不变，因此我们只需要比较上面两组式子的最大值的大小，我们希望交换之前的值较小，即

$$\max \left\{ \frac{a[1] \cdots a[i-1]}{b[i]}, \frac{a[1] \cdots a[i]}{b[i+1]} \right\} \leq \max \left\{ \frac{a[1] \cdots a[i-1]}{b[i+1]}, \frac{a[1] \cdots a[i-1]a[i+1]}{b[i]} \right\}$$



## 【例】国王游戏

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

小结

练习

上式两边同时消去公因式  $a[1] \cdots a[i-1]$  得到：

$$\max \left\{ \frac{1}{b[i]}, \frac{a[i]}{b[i+1]} \right\} \leq \max \left\{ \frac{1}{b[i+1]}, \frac{a[i+1]}{b[i]} \right\}$$

两边同时乘以  $b[i]b[i+1]$  得到：

$$\max \{b[i+1], a[i]b[i]\} \leq \max \{b[i], a[i+1]b[i+1]\}$$

因为大臣手上的都是正整数，故  $b[i+1] \leq a[i+1]b[i+1]$  且  $a[i]b[i] \geq b[i]$ ，所以若想让上述不等式成立则必须要求  $a[i]b[i] \leq a[i+1]b[i+1]$  (证明见下页)。



## 【例】国王游戏

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

小结

练习

假设  $a[i]b[i] > a[i+1]b[i+1]$ , 则:

$$\therefore a[i]b[i] \geq b[i]$$

$$\therefore a[i]b[i] > \max \{b[i], a[i+1]b[i+1]\}$$

$$\therefore \max \{b[i+1], a[i]b[i]\} \geq a[i]b[i]$$

$$\therefore \max \{b[i+1], a[i]b[i]\} > \max \{b[i], a[i+1]b[i+1]\}$$

上述结论与已知  $\max \{b[i+1], a[i]b[i]\} \leq \max \{b[i], a[i+1]b[i+1]\}$  矛盾, 故而假设错误, 即  $a[i]b[i] \leq a[i+1]b[i+1]$ 。



## 【例】叠罗汉

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【题目描述】

有  $n$  ( $2 \leq n \leq 10000$ ) 个罗汉，第  $i$  个罗汉的重量为  $a[i]$  ( $1 \leq a[i] \leq 10000$ )，托举力量为  $b[i]$  ( $1 \leq b[i] \leq 10^9$ )，求最多能选出多少个罗汉，使得他们按照某种方式叠起来后，前  $i-1$  个罗汉的总重量不超过第  $i$  个罗汉的托举力量。

### 【输入格式】

第一行一个整数  $n$  表示罗汉的数目。

接下来  $n$  行，每行两个整数  $a_i, b_i$ ，分别表示罗汉的重量和托举力量。

### 【输出格式】

一个整数，表示最多能有多少个罗汉叠起来。

### 【样例输入】

```
4
4 2
5 3
6 4
2 3
```

### 【样例输出】

```
2
```



## 【例】叠罗汉

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 按照罗汉的重量和托举力的和  $a[i] + b[i]$  从小到大排序。
- 依次尝试每个罗汉  $i$ :
  - 如果能放到最底下，就放在最底下，答案  $+1$ ；
  - 如果不能放到最底下，则用罗汉  $i$  替换掉当前参与叠罗汉的最重的一个 (前提是重量比罗汉  $i$  重)。(可以用堆来维护叠罗汉的情况)
- 证明方法：微扰 (邻项交换)





## 【例】叠罗汉

我们交换两个相邻的罗汉  $i$  和  $i + 1$ ，我们用罗汉的托举力和上面罗汉总重量的差来衡量一个罗汉序列的安全性 (越大越安全)，那么交换之前，两个罗汉的安全性为：

$$b[i] - (a[1] + \dots + a[i - 1]) \quad b[i + 1] - (a[1] + \dots + a[i])$$

交换之后，两个罗汉的安全性为：

$$b[i + 1] - (a[1] + \dots + a[i - 1]) \quad b[i] - (a[1] + \dots + a[i - 1] + a[i + 1])$$

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蓄栏预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习



## 【例】叠罗汉

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

其他罗汉的安全性显然不变，因此我们只需要比较上面两组式子的最小值的大小，我们希望交换之前的值较大，即

$$\min \{b[i] - (a[1] + \dots + a[i-1]), b[i+1] - (a[1] + \dots + a[i])\} \geq$$

$$\min \{b[i+1] - (a[1] + \dots + a[i-1]), b[i] - (a[1] + \dots + a[i-1] + a[i+1])\}$$

上式两边同时加上  $a[1] + \dots + a[i]$  得到：

$$\min \{b[i], b[i+1] - a[i]\} \geq \min \{b[i+1], b[i] - a[i+1]\}$$

显然  $b[i] > b[i] - a[i+1]$  且  $b[i+1] - a[i] < b[i+1]$ ，所以若想让上述不等式成立则必需要求  $b[i+1] - a[i] \geq b[i] - a[i+1]$ ，即  $a[i] + b[i] \leq a[i+1] + b[i+1]$  (证明见下页)。



## 【例】叠罗汉

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

小结

练习

假设  $b[i+1] - a[i] < b[i] - a[i+1]$ ，则：

$$\because b[i+1] - a[i] < b[i+1]$$

$$\therefore b[i+1] - a[i] < \min\{b[i+1], b[i] - a[i+1]\}$$

$$\because \min\{b[i], b[i+1] - a[i]\} \leq b[i+1] - a[i]$$

$$\therefore \min\{b[i], b[i+1] - a[i]\} < \min\{b[i+1], b[i] - a[i+1]\}$$

上述结论与已知条件  $\min\{b[i], b[i+1] - a[i]\} \geq \min\{b[i+1], b[i] - a[i+1]\}$  矛盾，故而假设错误，即  $b[i+1] - a[i] \geq b[i] - a[i+1]$ ，即  $a[i] + b[i] \leq a[i+1] + b[i+1]$ 。



## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

垒罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【题目描述】

给定一个  $n(1 \leq n \leq 500)$  个顶点  $m(1 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2})$  条边的无向图。其中每一个顶点和边都有一个正权值，现在要求出一个顶点数大于等于 2 的连通子图，使得顶点权和除以边权和最大。

### 【输入格式】

第一行有两个整数  $n(1 \leq n \leq 500)$  和  $m(0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2})$ 。

第二行有  $n$  个整数是各点的权值  $x_i(1 \leq x_i \leq 10^6)$ 。

接下来有  $m$  行，每行有三个整数  $x, y, w(1 \leq x < y \leq n, 1 \leq w \leq 10^3)$ ，分别表示图中边的两个端点和边权。

### 【输出格式】

输出点权和除以边权和最大值，保留到小数点后两位。

### 【样例输入】

```
3 2
1 2 3
1 2 1
2 3 2
```

### 【样例输出】

```
3.00
```



## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

我们首先来看一个由 3 个点 3 条边组成的图，除了它本身作为一个连通子图，还有 6 个连通子图：

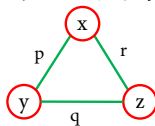


图:  $\frac{x+y+z}{p+q+r}$

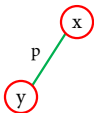


图:  $\frac{x+y}{p}$

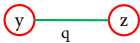


图:  $\frac{y+z}{q}$

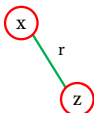


图:  $\frac{x+z}{r}$

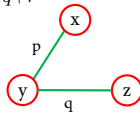


图:  $\frac{x+y+z}{p+q}$

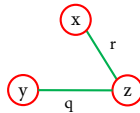


图:  $\frac{x+y+z}{q+r}$

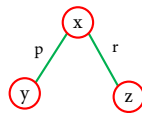


图:  $\frac{x+y+z}{p+r}$

- 问：这几个连通子图，哪一个的值最大？



## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

- 很容易得出  $\frac{x+y+z}{p+q+r}$  不是最大的。
- 经过证明  $\frac{x+y+z}{p+q}$ 、 $\frac{x+y+z}{q+r}$ 、 $\frac{x+y+z}{p+r}$  不是最大的 (证明见下页)。
- 所以最大的在  $\frac{x+y}{p}$ 、 $\frac{y+z}{q}$ 、 $\frac{x+z}{r}$  中，即所求的子图必然由两个点和一条边构成。
- 从上面可以得出，子图中有三个点不如两个点的值大。推广到一般情况，子图中有  $k$  个点不如有 2 个点的值大 (证明见下下页)，所以对于一般情况，所求的子图必然由两个点和一条边构成。



## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

若要证明  $\frac{x+y+z}{p+q}$ 、 $\frac{x+y+z}{q+r}$ 、 $\frac{x+y+z}{p+r}$  不是最大的，我们只需要证明： $\max\{\frac{x+y}{p}, \frac{y+z}{q}\} > \frac{x+y+z}{p+q}$ ，即可证明  $\frac{x+y+z}{p+q}$  肯定不是最大的，同理可证  $\frac{x+y+z}{q+r}$ 、 $\frac{x+y+z}{p+r}$  不是最大的。

假设  $\frac{x+y}{p} \leq \frac{x+y+z}{p+q}$ ， $\frac{y+z}{q} \leq \frac{x+y+z}{p+q}$ ，则

$$\therefore (x+y)(p+q) \leq p(x+y+z), (y+z)(p+q) \leq q(x+y+z)$$

$$\therefore qx + qy \leq pz, py + pz \leq qx$$

$$\therefore py + qx + qy \leq py + pz < qx$$

$$\therefore py + qy \leq 0$$

上述结论与点和边的权值均为正整数矛盾，故而假设错误，即  $\max\{\frac{x+y}{p}, \frac{y+x}{q}\} > \frac{x+y+z}{p+q}$  是正确的，即  $\frac{x+y+z}{p+q}$  不是最大的。



## 【例】DZY Loves Physics<sup>1</sup>

对于一般的情况，我们还是研究一个有  $n$  个顶点的完全图，它的所有含有所有顶点的连通子图中，最小生成树的点权和除以边权和最大。为了方便表述，我们假设最小生成树是一个链：



我们现在需要证明

$$\max \left\{ \frac{a_1 + a_2}{b_1}, \frac{a_2 + a_3}{b_2}, \dots, \frac{a_{n-1} + a_n}{b_{n-1}} \right\} > \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i}$$

<sup>1</sup>并不是必须的，结合贪心想法，该贪心策略已经是正确的。





## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴  
日程预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

小结

练习

假设

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + a_2}{b_1} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i} \\ \frac{a_2 + a_3}{b_2} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i} \\ &\vdots \\ \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{b_{n-2}} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i} \\ \frac{a_{n-1} + a_n}{b_{n-1}} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^{n-1} b_i}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2) \sum_{i=1}^{n-1} b_i &\leq b_1 \sum_{i=1}^n a_i \\ (a_2 + a_3) \sum_{i=1}^{n-1} b_i &\leq b_2 \sum_{i=1}^n a_i \\ &\vdots \\ (a_{n-2} + a_{n-1}) \sum_{i=1}^{n-1} b_i &\leq b_{n-2} \sum_{i=1}^n a_i \\ (a_{n-1} + a_n) \sum_{i=1}^{n-1} b_i &\leq b_{n-1} \sum_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$



## 【例】DZY Loves Physics

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

上述  $n - 1$  个不等式相加得到：

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=2}^{n-1} a_i \right) \times \sum_{i=1}^{n-1} b_i \leq \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{i=1}^{n-1} b_i$$

化简之后可以得到

$$\sum_{i=2}^{n-1} a_i \leq 0$$

这与点和边的权值均为正整数矛盾，故而假设错误，所以我们要证明的结论是正确的。现在我们需要证明  $n$  个顶点的完全图的其他连通子图的点权和与边权之和的商不是最大的，这个按照同样的方法也可以证明 (后面的情况相当于点数小于  $n$  的完全图的情况)。



## 【例】树染色

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

日程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

### 【题目描述】

一颗树有  $n$  个节点，这些节点被标号为：1, 2, 3, ...,  $n$ ，每个节点  $i$  都有一个权值  $A[i]$ 。现在要把这棵树的节点全部染色，染色的规则是：

- 根节点  $R$  可以随时被染色；对于其他节点，在被染色之前它的父亲节点必须已经染上了色。
- 每次染色的代价为  $T * A[i]$ ，其中  $T$  代表当前是第几次染色。

求把这棵树染色的最小总代价。

### 【输入格式】

第一行包含两个整数  $n$  ( $1 \leq n \leq 1000$ ) 和  $R$ ，分别代表树的节点数以及根节点的序号。

第二行包含  $n$  个整数，代表所有节点的权值，第  $i$  个数即为第  $i$  个节点的权值  $A[i]$  ( $1 \leq A[i] \leq 1000$ )。

接下来  $n - 1$  行，每行包含两个整数  $a$  和  $b$ ，代表两个节点的序号，两节点满足关系： $a$  节点是  $b$  节点的父节点。

### 【输出格式】

输出一个整数，代表把这棵树染色的最小总代价。



## 【例】树染色

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

蛋糕预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动  
安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

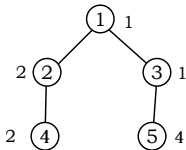
### 【样例输入】

```
5 1
1 2 1 2 4
1 2
1 3
2 4
3 5
```

### 【样例输出】

33

### 【样例解释】



按照  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  的顺序染色，花费为  
 $1 \times 1 + 2 \times 1 + 3 \times 4 + 4 \times 2 + 5 \times 2 = 33$ 。



## 【例】树染色

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 贪心策略 1: 每一步在可以被染色的点里选权值最大的染色 (错误)。
- 反例: 构造一棵树, 让一个权值很小的结点下边有很多权值巨大的结点, 另一个权值较大的结点却没有子结点。



## 【例】树染色

贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

贪心算法

例题

日光浴

日程预定

监控安装

超市

带有截止时间的活动

安排

国王游戏

叠罗汉

DZY Loves Physics

树染色

小结

练习

- 可以从贪心策略 1 中提取出一个正确的性质：树中除根结点外权值最大的点，一定会在它的父结点被染色后立即染色。
- 可以确定的是，树中权值最大的点及其父结点的染色操作是连续进行的，可以把这两个点“合并起来”。合并得到的新点的权值设为这两个点的权值的平均值。
- 例如有权值为  $x, y, z$  的三个点，已知  $x$  和  $y$  的染色操作是连续进行的，那么就有两种可能的染色方案：
  - 先染  $x, y$ ，再染  $z$ ，代价是  $x + 2y + 3z$ 。
  - 先染  $z$ ，再染  $x, y$ ，代价是  $z + 2x + 3y$ 。
- 主要关心这两个代价之间的大小关系，所以不妨把两个式子同时加上  $(z - y)$  再除以 2，分别得到：
  - $\frac{x+y}{2} + 2z$
  - $z + 2\frac{x+y}{2}$
- 这恰好就相当于有权值为  $\frac{x+y}{2}$  和  $z$  的两个点的两种染色次序。换言之，下列两种情况的“最优染色次序”可以互相转化：
  - 权值为  $x, y, z$  的三个点。
  - 权值为  $\frac{x+y}{2}$  和  $z$  的两个点。



## 【例】树染色

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
盲栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 进一步推进，可以得到一种“等效权值”的算法：记录每个点是由多少个点合并而成的，一个点的“等效权值”定义为：

该点包含的原始权值总和  $\div$  该点包含的原始点

- 根据一开始提到的性质，不断在树中取“等效权值”最大的点  $p$ ，与其父结点  $fa$  合并。合并之前  $p$  与  $fa$  各自包含的点的染色顺序是已知的，我们就让  $p$  中第一个点排在  $fa$  中最后一个点之后紧接着被染色，把这个顺序保存在  $p$  与  $fa$  合并以后的点上。
- 最终整棵树合并成一个点后，就按照这个点内保存的顺序在原始的树上把各个结点依次染色，计算出花费的总代价，即为所求。



## 小结

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
日程预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

### 小结

### 练习

- 贪心的意思是指在求解问题时，只考虑当下，即总是做出当前看来是最好的选择，不是从总体最优上去考虑，仅是在某种意义上的局部最优解。
- 贪心算法没有固定的框架，算法的关键是贪心策略。
- 贪心算法适用于局部最优解能导致产生全局最优解的问题。
- 在算法竞赛实战过程中，贪心算法的正确性证明有时不是必要的（花费时间），借助对拍等方法来寻找反例可能是一个更有效率的做法。
- 在平时学习和练习过程中，读者最好还是尽量证明贪心算法的正确性。





## 练习

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
畜栏预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 日光浴 (COGS 2380)
- 畜栏预定 (COGS 3448)
- 监控安装 (COGS 3187)
- 种树 (COGS 3193)
- 喷水装置 (COGS 3194)
- 拼数 [NOIP 1998](COGS 3767)
- 合并果子 (COGS 75)
- 超市 (COGS 3097)
- 国王游戏 [NOIP 2012](COGS 1263)
- 叠罗汉 (COGS 3202)
- DZY Loves Physics(COGS 3201)
- 树染色 (COGS 3429)



## 练习

### 贪心题目选讲

河南省实验中学  
信息技术组

### 贪心算法

#### 例题

日光浴  
蛋糕预定  
监控安装  
超市  
带有截止时间的活动  
安排  
国王游戏  
叠罗汉  
DZY Loves Physics  
树染色

#### 小结

#### 练习

- 神奇的宝物 (COGS 3977)
- 有  $n$  种物品 (COGS 3719)
- 删数问题 [NOIP 1994](COGS 2373)
- 旅行家的预算 [NOIP 1999](COGS 1160)
- 任务 (COGS 2231)
- 种树 [国家集训队 2011](COGS 1862)
- 数据备份 [CTSC 2007](COGS 2884)
- 决斗 [CSP 2024](COGS 4053)
- 超速检测 [CSP 2024](COGS 4054)
- 社团招新 [CSP 2025](COGS 4196)
- 糖果店 [NOIP 2025](COGS 4229)