



队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蛭蛭

双端队列

练习

队列题目选讲

河南省实验中学信息技术组

2026年01月27日



队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蛭蛭

双端队列

练习

- 队列
- 双端队列
- 循环队列
- 优先队列(堆)



【例】集合中最小的 N 个数

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

【题目描述】

求集合的前 n 个元素：编一个程序，按递增次序生成集合 M 的最小的 n 个数， M 的定义如下：

- 数 1 属于 M ；
- 如果 x 属于 M ，则 $y = 2 \times x + 1$ 和 $z = 3 \times x + 1$ 也属于 M ；
- 此外再没有别的数属于 M ，集合中的数字不应当重复。

【输入格式】

一行一个正整数 $n(1 \leq n \leq 10^6)$ 。

【输出格式】

一行，有 n 个整数，表示集合 M 中最小的 n 个数，每两个数之间用一个空格隔开。

【样例输入】

7

【样例输出】

1 3 4 7 9 10 13



【例】集合中最小的 N 个数

- 每次都要取出集合中最小的数字，以及添加两个数字到集合中，所以可以用堆 (优先队列) 实现。
- 要求数字不能重复，那么如果当前出队的元素为 x ，出队后队头的元素和 x 相等，则再次出队。
- 时间复杂度： $O(N \log N)$ 。

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习



【例】集合中最小的 N 个数

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 定义队列 q_2 存储所有 $2 \times x + 1$ 的数， q_3 存储所有 $3 \times x + 1$ 的数，那么这两个队列中的元素均为从小到大排列。
- 首先，让 3 入队列 q_2 ，4 入队列 q_3 。
- 每次只需要取 q_2 和 q_3 的队头中较小的那个数字 z 输出，一定是当前未输出数字中最小的，然后让 $2 \times z + 1$ 入队列 q_2 ，让 $3 \times z + 1$ 入队列 q_3 。

q2	3	7	9	15	19	21	27	31	39	...
q3	4	10	13	22	28	31	40	46	58	...

- 时间复杂度： $O(N)$ 。



【例】小组队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

【题目描述】

有 n 个小组要进行排队，每个小组中有若干人。当一个人来到队伍时，如果队伍中已经有自己小组的成员，他就直接插队排在自己小组成员的后面，否则就站在队伍的最后面。请你编写一个程序模拟这种小组队列。

【输入格式】

第一行一个正整数 n ($1 \leq n \leq 300$)，表示小组的数目。

接下来 n 行，每行表示一个小组。每行第一个数字 k 表示小组成员人数，接下来 k 个数，每个数表示该组成员的编号。

接下来若干行，表示入队和出队操作，ENQUEUE k 表示让编号为 k 的人入队，DEQUEUE 表示队头出队，输入 STOP 表示结束入队。

【输出格式】

对于每个出队命令，输出一行一个整数，表示出队的成员编号。

【数据范围于约定】

对于 30% 的数据， $1 \leq n \leq 100, 1 \leq m \leq 100$ ，进出队命令数 ≤ 50 。

对于 100% 的数据， $1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 300$ ，进出队命令数 $\leq 10^5$ 。



【例】小组队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 任何时刻，同一个小组的人只要来到队伍，必然会站在一起，但是每个小组的队伍长度不定，可以建立一个队列 q_0 来存储队伍中小组的编号。
- 然后再为第 i 个小组建立一个队列 q_i 来存储队伍中第 i 个小组的成员的排队情况。
- 当编号为 x 的人入队时，它的组号为 k ，那么直接将 x 插入 q_k 末尾。如果插入之前 q_k 为空，那么将 k 插入队列 q_0 ，表明队伍中出现了一个新小组。
- 当收到出队指令时， q_0 的队头即为当前最前面的小组 k ，将 q_k 的队头出队。出队后如果 q_k 为空，那么就从 q_0 中让 k 出队，表明当前队伍中没有小组 k 的成员。



【例】蚯蚓

蚰蚰国最近蚯蚓成灾了！隔壁跳蚤国的跳蚤也拿蚯蚓们没办法，蚰蚰国王只好去请神刀手来帮他们消灭蚯蚓。

蚰蚰国里现在共有 n 只蚯蚓 (n 为正整数)。每只蚯蚓拥有长度，我们设第 i 只蚯蚓的长度为 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$)，并保证所有的长度都是非负整数 (即：可能存在长度为 0 的蚯蚓)。

每一秒，神刀手会在所有的蚯蚓中，准确地找到最长的那一只 (如有多个则任选一个) 将其切成两半。神刀手切开蚯蚓的位置由常数 p (是满足 $0 < p < 1$ 的有理数) 决定，设这只蚯蚓长度为 x ，神刀手会将其切成两只长度分别为 $\lfloor px \rfloor$ 和 $x - \lfloor px \rfloor$ 的蚯蚓。特殊地，如果这两个数的其中一个等于 0，则这个长度为 0 的蚯蚓也会被保留。此外，除了刚刚产生的两只新蚯蚓，其余蚯蚓的长度都会增加 q (是一个非负整常数)。

蚰蚰国王知道这样不是长久之计，因为蚯蚓不仅会越来越多，还会越来越长。蚰蚰国王决定求助于一位有着洪荒之力的神秘人物，但是救兵还需要 m 秒才能到来…… (m 为非负整数)

蚰蚰国王希望知道这 m 秒内的战况。具体来说，他希望知道：

- m 秒内，每一秒被切断的蚯蚓被切断前的长度 (有 m 个数)；
- m 秒后，所有蚯蚓的长度 (有 $n + m$ 个数)。

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习



【例】蚯蚓

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

【输入格式】

第一行包含六个整数 n, m, q, u, v, t ，其中： n, m, q 的意义见【问题描述】； u, v, t 均为正整数；你需要自己计算 $p = u/v$ （保证 $0 < u < v$ ）； t 是输出参数，其含义将会在【输出格式】中解释。

第二行包含 n 个非负整数，为 a_1, a_2, \dots, a_n ，即初始时 n 只蚯蚓的长度。

同一行中相邻的两个数之间，恰好用一个空格隔开。

保证 $1 \leq n \leq 10^5$ ， $0 \leq m \leq 7 \times 10^6$ ， $0 < u < v \leq 10^9$ ， $0 \leq q \leq 200$ ， $1 \leq t \leq 71$ ， $0 \leq a_i \leq 10^8$ 。

【输出格式】

第一行输出 $\lfloor \frac{m}{t} \rfloor$ 个整数，按时间顺序，依次输出第 t 秒，第 $2t$ 秒，第 $3t$ 秒，……被切断蚯蚓（在被切断前）的长度。

第二行输出 $\lfloor \frac{n+m}{t} \rfloor$ 个整数，输出 m 秒后蚯蚓的长度；需要按从大到小的顺序，依次输出排名第 t ，第 $2t$ ，第 $3t$ ，……的长度。

同一行中相邻的两个数之间，恰好用一个空格隔开。即使某一行没有任何数需要输出，你也应输出一个空行。

请阅读样例来更好地理解这个格式。



【例】蚯蚓

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

【样例输入】

```
3 7 1 1 3 1
3 3 2
```

【样例输出】

```
3 4 4 4 5 5 6
6 6 6 5 5 4 4 3 2 2
```

【样例解释】

在神刀手到来前：3只蚯蚓的长度为3,3,2。

1秒后：一只长度为3的蚯蚓被切成了两只长度分别为1和2的蚯蚓，其余蚯蚓的长度增加了1。最终4只蚯蚓的长度分别为(1,2),4,3。括号表示这个位置刚刚有一只蚯蚓被切断。

2秒后：一只长度为4的蚯蚓被切成了1和3。5只蚯蚓的长度分别为：2,3,(1,3),4。

3秒后：一只长度为4的蚯蚓被切断。6只蚯蚓的长度分别为：3,4,2,4,(1,3)。

4秒后：一只长度为4的蚯蚓被切断。7只蚯蚓的长度分别为：4,(1,3),3,5,2,4。

5秒后：一只长度为5的蚯蚓被切断。8只蚯蚓的长度分别为：5,2,4,4,(1,4),3,5。

6秒后：一只长度为5的蚯蚓被切断。9只蚯蚓的长度分别为：(1,4),3,5,5,2,5,4,6。

7秒后：一只长度为6的蚯蚓被切断。10只蚯蚓的长度分别为：2,5,4,6,6,3,6,5,(2,4)。

所以，7秒内被切断的蚯蚓的长度依次为3,4,4,4,5,5,6。7秒后，所有蚯蚓长度从大到小排序为6,6,6,5,5,4,4,3,2,2。



【例】蚯蚓

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 如果 $q = 0$ ，那么蚯蚓不会变长，那么问题就变成了在集合中找到一个最大值，然后把最大值拆成两份加入集合，可以用优先队列实现。
- 当 $q > 0$ 时，除了最大值拆成两个数之外，集合中所有的其他数都会增加 q 。设最大值为 x ，不妨认为产生的两个大小为 $\lfloor px \rfloor - q$ 和 $x - \lfloor px \rfloor - q$ 的新数，然后再把整个集合都加上 q ，这个操作与要求的操作是等价的。
- 于是维护一个变量 d ，表示整个集合的“偏移量”，集合中的数加上 d 是它的真实数值，初始时令 $d = 0$ ，对于每一秒：
 - ① 取出集合中最大值 x ，令 $x = x + d$ 。
 - ② 将 $\lfloor px \rfloor - q - d$ 和 $x - \lfloor px \rfloor - q - d$ 插入集合。
 - ③ 令 $d = d + p$ 。重复上述步骤 m 轮，即可得到最终集合中所有数的值。
- 时间复杂度： $M \log(N + M)$ 。



【例】蚯蚓

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 注意到 p, q 为常数, $0 < p < 1$ 且 q 是非负整数。设 x_1, x_2 且 $x_1 \geq x_2$, 那么 x_1 在 x_2 之前被取出集合

第 k 秒	第 $k + 1$ 秒
$\lfloor px_1 \rfloor$	$\lfloor px_1 \rfloor + q$
$x_1 - \lfloor px_1 \rfloor$	$x_1 - \lfloor px_1 \rfloor + q$
x_2	$\lfloor p(x_2 + q) \rfloor$
	$x_2 + q - \lfloor p(x_2 + q) \rfloor$

- 显然有 $\lfloor px_1 \rfloor + q = \lfloor px_1 + q \rfloor \geq \lfloor p(x_1 + q) \rfloor \geq \lfloor p(x_2 + q) \rfloor$ 以及 $x_1 - \lfloor px_1 \rfloor + q \geq x_1 + q - \lfloor p(x_1 + q) \rfloor \geq x_2 + q - \lfloor p(x_2 + q) \rfloor$ 。
- 若 x_1 在 x_2 之前被取出集合, 则在一秒后, x_1 分成的两个数 $\lfloor px_1 \rfloor + q$ 和 $x_1 - \lfloor px_1 \rfloor + q$ 分别不小于 $x_2 + q$ 分成的两个数 $\lfloor p(x_2 + q) \rfloor$ 和 $x_2 + q - \lfloor p(x_2 + q) \rfloor$, 也即不仅从集合中取出的数是单调递减的, 新产生的两类数值也是递减的。



【例】蚯蚓

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 因此可以建立三个队列 A, B, C 。
 - 队列 A 保存初始的 n 个数从大到小排序的序列。
 - 队列 B 保存每秒产生的新的 $\lfloor px \rfloor - q - d$ 。
 - 队列 C 保存每秒产生的新的 $x - \lfloor px \rfloor - q - d$ 。

起初队列 B, C 为空，新产生的数从分别从队尾插入，那么在任意时刻，集合中最大的数就是队列 A, B, C 队头的最大值。

- 时间复杂度： $O(M + N \log N)$ 。



【例】双端队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

栈

双端队列

练习

【题目描述】

Sherry 现在碰到了一个问题，她需要对 n 个整数需要排序，但是她手头能用的工具就是若干个双端队列。

她需要依次处理这 n 个数，对于每个数 a_i ，Sherry 能做以下两件事：

- ① 新建一个双端队列，并将当前数作为这个队列中的唯一的数；
- ② 将当前数放入已有的队列的头之前或者尾之后。

对所有的数处理完成之后，Sherry 将这些队列排序后就可以得到一个非降的的序列。

请你求出最少需要多少个双端序列。

【输入格式】

一行一个正整数 $n(n \leq 2 \times 10^5)$ 。

接下来一行 n 个整数，表示需要处理的整数序列。

【输出格式】

输出一个整数，代表最少需要的双端队列数。



【例】双端队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

栈树

双端队列

练习

【样例输入】

```
6
3 6 0 9 6 3
```

【样例输出】

```
2
```

【样例解释】

第1个数3，新建一个双端列，目前双端队列为 [3]。

第2个数6，新建一个双端队列，目前双端队列为 [3], [6]。

第3个数0，插入第1个双端队列队头，目前双端队列为 [0, 3], [6]。

第4个数9，插入第2个双端队列队尾，目前双端队列为 [0, 3], [6, 9]。

第5个数6，插入第2个双端队列队头，目前双端队列为 [0, 3], [6, 6, 9]。

第6个数3，插入第1个双端队列队尾，目前双端队列为 [0, 3, 3], [6, 6, 9]。

这两个双端队列按照目前顺序连接起来即可实现排序。



【例】双端队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

极值

双端队列

练习

- 这个问题很难直接求解，因为在不知道后续数字的情况下做出的局部决策，可能会造成两个数 p, q 在同一队列中，如果后续出现介于 p, q 之间的数字，直接无解。
- 不妨逆向思维，先把这 n 个数排序，然后分成尽可能少的段，让每一段成为一个合法的双端队列。
- 一段数字能构成合法的双端队列需要满足什么条件呢？利用排序后数据在原始数组 a 中的下标构成数组 b 。例如，数组 $a = [3, 6, 0, 9, 6, 3]$ 排序之后为 $[0, 3, 3, 6, 6, 9]$ ，对应的下标数组 $b = [3, 1, 6, 2, 5, 4]$ 。
- 经过分析可以发现，如果 b 中的一段满足单谷性质（先递减，后递增），那么就可构成合法双端队列（ b 中保存的是下标，这一段的谷点就相当于第一个入队，递减的一段相当于队头插入，递增的一段相当于从队尾插入）。



【例】双端队列

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的N个数

小组队列

极值

双端队列

练习

- 需要注意的是，如果 a 中的数据存在相同的情况，那么这几个数在排序时的顺序是不定的，可以随意调整顺序，使得尽可能满足题目的要求。
- 于是按照 a 中的数值将 b 分成若干个区间。例如，数组 $a = [3, 6, 0, 9, 6, 3]$ 排序之后为 $[0, 3, 3, 6, 6, 9]$ ，对应的下标数组 $b = [[3], [1, 6], [2, 5], [4]]$ 。
- 一个区间一个区间地对 b 进行处理，最终拼成若干大段，每一段都尽量具有单谷性质。记录当前序列末尾是递增还是递减，对于后续区间，尽量维持目前递增或递减状态(贪心)接入当前序列。
 - ① 第1个区间始终看作递减区间插入队列，当前序列为 $[3]$ ，正处于递减状态。
 - ② 第2个区间 $[1, 6]$ ，因为 $6 > 3$ ，无法继续递减，只能以递增的形式 $[1, 6]$ 插入序列，当前序列为 $[3, 1, 6]$ ，处于递增状态。
 - ③ 第3个区间 $[2, 5]$ ，因为 $2 < 6$ ，无法继续递增，只能以递减形式 $[5, 2]$ 插入序列，当前序列为 $[3, 1, 6, 5, 2]$ ，处于递减状态。
 - ④ 第4个区间 $[4]$ ，因为 $4 > 2$ ，无法继续递减，只能以递增形式 $[4]$ 插入序列，当前序列为 $[3, 1, 6, 5, 2, 4]$ ，处于递增状态。
- 最终得到的序列为 $[3, 1, 6, 5, 2, 4]$ ，包含 $[3, 1, 6]$, $[5, 2, 4]$ 两个单谷段，满足问题要求。



练习

队列题目选讲

河南省实验中学
信息技术组

队列

例题

集合中最小的 N 个数

小组队列

蚯蚓

双端队列

练习

- 集合中最小的 N 个数 (COGS 1655)
- 小组队列 [SDOI 2007](COGS 717)
- 蚯蚓 [NOIP 2016](COGS 2560)
- 双端队列 [BJOI 2011](COGS 3457)
- 焰硝庭火 (COGS 3895)