

# 倒计时 (countdown)

- ◎ 一开始你有一个非负整数  $n$ 。
- ◎ 每一次操作，你可以从当前的数上减去当前的数某个数位上的数值。当当前数变成 0 时，倒计时结束。
- ◎ 求让倒计时结束的最少操作次数。

# 倒计时 (countdown)

---

- ◎ 15%:  $n \leq 10^4$
- ◎ 25%:  $n \leq 10^6$
- ◎ 直接暴力dp

# 倒计时 (countdown)

---

- ◎ 50%:  $n \leq 10^9$
- ◎ 分段打表 or 其它

# 倒计时 (countdown)

- 100%:  $n \leq 10^{18}$
- 首先我们不难有这样的一个思路，令  $f[i]$  表示将  $i$  减到 0 所需最少操作数，然后枚举减去哪一位上的数进行转移，复杂度是  $O(n \log n)$  的。
- 要更进一步，我们就得利用更多的性质：对于任意的  $a > b$ ，有  $f[a] \geq f[b]$ 。
- 如果这个是对的，那我们每次肯定是减去数值最大的那一位。

# 倒计时 (countdown)

证明？

我们用归纳法，假设在 $0..n$ 以内这个性质是成立的，要证明在 $0..n+1$ 以内这个性质仍然成立，那么我们只要证明 $f[n] \leq f[n+1]$ 即可，换而言之，（另 $g(x)$ 表示 $x$ 数位上最大的那位的数值）我们要证明的是 $f(n-g(n)) \leq f(n+1-g(n+1))$ ，即 $n-g(n) \leq n+1-g(n+1)$ ，那么只要证 $g(n+1)-g(n) \leq 1$ 即可，而这是显然的。

# 倒计时 (countdown)

- 然后我们得到了我们的策略，即每次减去最大的数。我们不妨继续dp，用 $f[i][j]$ 表示前面的数位中最大的一位是 $i$ ，然后要把 $j$ 减至不大于0的最少操作数，那么转移只要不断把当前最高非零位消去1即可。考虑有用的状态总数， $i$ 只有 $[0,9]$ ，而 $j$ 要么是 $n$ 的某段后缀，要么形如 $10^k - t$  ( $0 \leq t \leq 9$ )，所以有用的状态数是不多的，那么我们只要记录有用的状态进行转移即可。

# 倒计时 (countdown)

---

- 至于具体实现可以使用记忆化搜索或者分2类表示状态进行dp。