郑州轻工业大学“筑梯杯”
第十八届程序设计大赛暨省内高校邀请赛

解题报告

郑州轻工业大学

2026 年 4 月 6 日

难度分布

预估难度分布：

- **Easy:** G,K
- **Easy-Mideum:** C,D,F,J
- **Mideum:** A,I,L
- **Mideum-Hard:** B,E
- **Hard:** H

封榜前过题分布：

- **Easy:** G,K
- **Easy-Mideum:** C,D,J
- **Mideum:** F,A
- **Mideum-Hard:** B,E,L
- **Hard:** H,I

Problem G - 冰淇凌

题目大意

- 找出三个数整数里的最小值。
- 关键词：比较大小

Problem G - 冰淇凌

题目大意

- 找出三个数整数里的最小值。
- 关键词：比较大小

- 直接比较大小，取最小整数即可
- 复杂度： $O(1)$

Problem K - 巴啦啦能量

题目大意

- 求出区间 $[l, r]$ 内偶数的和。
- 关键词：循环，等差数列求和

Problem K - 巴啦啦能量

题目大意

- 求出区间 $[l, r]$ 内偶数的和。
- 关键词：循环，等差数列求和

1 数据范围不大我们可以直接在区间 $[l, r]$ 内循环加偶数。

Problem K - 巴啦啦能量

题目大意

- 求出区间 $[l, r]$ 内偶数的和。
- 关键词：循环，等差数列求和

1. 数据范围不大我们可以直接在区间 $[l, r]$ 内循环加偶数。
2. 等差数列求和。先找到区间内第一个偶数和最后一个偶数，利用公式计算。

- 复杂度：$O(1)$

Problem C - 等差数列

题目大意

- 给定 n 个互不相同的整数，要找出最大的正整数 d，使得存在一个公差为 d 的等差数列，且这 n 个数都是该数列中的项。
- 关键词：gcd，等差数列

Problem C - 等差数列

题目大意

- 给定 n 个互不相同的整数，要找出最大的正整数 d，使得存在一个公差为 d 的等差数列，且这 n 个数都是该数列中的项。
- 关键词：gcd，等差数列

- 由于数列中的项可以任意选择起始值，因此这 n 个数任意相邻两项的差必须是 d 的整数倍。最大的 d 就是所有相邻差的最大公约数。

  注意：差值为负数。
- 复杂度：gcd $O(n \times \log n)$

Problem D - 卖货

题目大意

- 有 n 件物品，每件物品小吴出价 b_i，小高出价 c_i。小王要选恰好 k 件卖给小吴，其余卖给小高，每件只能卖一人。求最大总收入。
- 关键词：贪心，差值排序

Problem D - 卖货

题目大意

- 有 n 件物品，每件物品小吴出价 b_i，小高出价 c_i。小王要选恰好 k 件卖给小吴，其余卖给小高，每件只能卖一人。求最大总收入。
- 关键词：贪心，差值排序

- 总收入 = 所有物品卖给小高的价格总和 + 选给小吴的物品额外带来的差价 $b_i - c_i$。所以先计算所有 c_i 之和，再选出 $b_i - c_i$ 最大的 k 个差值加到总和中即可。
- 复杂度：排序 $O(n \times \log n)$

Problem F - 覆盖面积

题目大意

- 给定一个 $n \times m$ 的网格，每个格子有海拔高度。水只能从高海拔或相等海拔流向相邻（上下左右）且海拔不高于当前格子的格子。每次询问给出一个水源坐标，求从该水源出发（包括自身）能到达的所有格子数量。需要处理多达 10^6 次询问。
- 关键词：BFS, DFS，记忆化搜索

Problem F - 覆盖面积

- 直接对每次询问做 BFS/DFS 会超时（10^6次×2500格子）。需要预处理，将询问复杂度降为 O(1)。
- 提前将每个格子的询问情况，跑一遍 BFS/DFS 记录下所有答案，询问时直接输出即可
- 复杂度：排序 $O(n \times m \times q)$

Problem J - 我要验骰

题目大意

- 给出一个六面骰，求若干次翻滚过后接地面的数字。
- 关键词：模拟

Problem J - 我要验骰

题目大意

- 给出一个六面骰，求若干次翻滚过后接地面的数字。
- 关键词：模拟

- 维护六个面的数字，根据滚动方向更新。用数组表示下标，0 前,1 后,2 左,3 右,4 上,5 下。滚动时按规则交换。
- 复杂度：O(n)

Problem A - 有人截图了！

题目大意

- 给定线段 AB 和轴对齐矩形（由两个对角顶点确定），求线段落在矩形内部（含边界）部分的长度。
- 关键词：参数方程，Liang–Barsky 算法

Problem A - 有人截图了！

题目大意

- 给定线段 AB 和轴对齐矩形（由两个对角顶点确定），求线段落在矩形内部（含边界）部分的长度。
- 关键词：参数方程，Liang–Barsky 算法

1. 使用 Liang–Barsky 直线裁剪算法，通过参数 t 表示线段上的点 $P(t) = A + t(B - A), t \in [0, 1]$，分别与矩形的四条边界（左、右、下、上）求交，得到有效 t 区间 $[t_0, t_1]$，最终长度为 $|AB| \cdot (t_1 - t_0)$。

- 复杂度： $O(1)$

Problem A - 有人截图了！

2 已知数据范围中 x 的取值区间为 $[-10000, 10000]$，针对该问题可采用" 微元法 + 二分优化" 求解线段被矩形线框截取的有效长度。

- 取 x 坐标中的较小值和较大值。
- 以 10^{-4} 为步长逐一枚举 x 值，直至达到 maxx；对每个枚举的 x 值，代入线段的直线方程，计算出对应的 y 值；校验该坐标点 (x, y) 是否完全在矩形线框内部，筛选出合法的 x 区间；
- 精度优化：在合法 x 区间的左右端点各向外延伸 10^{-4}，再以 10^{-7} 为极小步长二次精细枚举，精准锁定最终的合法区间。

Problem A - 有人截图了！

- 基础逐一枚举效率较低，可通过二分查找大幅优化：在 x 枚举过程中，一旦找到第一个合法的 x 值，无需继续逐一枚举，直接使用二分查找快速定位该连续合法区间的最后一个 x 值，直接确定完整的有效 x 区间。
- 复杂度： $O(\ (x_{\max} - x_{\min}) \times 10^4\ )$

Problem I - 好想吃马斯卡彭喵!

题目大意

- 有 n 个盒子，每个盒子可能有 0 或 1 个蛋糕（未知）。可以花费 $w_{l,r}$ 询问区间 $[l, r]$ 内蛋糕总数的奇偶性。问最少需要多少总花费，才能唯一确定所有盒子的蛋糕分布。
- 关键词：最小生成树，贪心

Problem I - 好想吃马斯卡彭喵！

- 定义前缀异或和 S_i = 前 i 个盒子中蛋糕数的奇偶性（$S_0 = 0$）。区间 $[l, r]$ 的奇偶性等于 $S_r \otimes S_{l-1}$。
- 要确定每个盒子的值（即 $S_i \otimes S_{i-1}$），等价于知道所有 $S_i (i = 1..n)$ 与 S_0 的关系。
- 每次询问相当于在节点 $l - 1$ 与节点 r 之间连一条边，边权为 $w_{l,r}$，表示知道了这两个前缀和的异或关系。当整个图连通时，从 S_0 出发可以推出所有 S_i，从而确定每个盒子。
- 因此，问题转化为：在 $n + 1$ 个节点（$0 \sim n$）的完全图中，每条边有权重，求最小生成树的总权值。
- 使用 Prim 和 Kruskal 均可。由于是稠密图 Prim 算法时间上会更优。
- 复杂度：$O(n^2)$

Problem L - 贪吃的猪

题目大意

- 有 n 道菜，每道菜有售价 A_i。必须保留第一道和最后一道菜，可以删除中间一段连续的菜（至少删除一道，且不能删头尾）。删除后剩余菜品按原顺序排列，求这些剩余菜品的最低平均售价。
- 关键词：二分，贪心，最大子段和

Problem L - 贪吃的猪

- 可以发现平均售价具有单调性。
- 二分答案。二分目标平均值 mid，判断是否存在一种删除方案，使得剩余菜品的平均售价 $\leq$ mid。
- 判断条件转化：设总售价和 total，删除的连续子段和为 sum，长度为 len，则剩余平均值为 $\frac{\text{total}-\text{sum}}{\text{n}-\text{len}}$。
- 要求:

$$\frac{\text{total}-\text{sum}}{\text{n}-\text{len}} \leq \text{mid} \quad \Leftrightarrow \quad \text{total}-\text{mid}\times\text{n} \leq \text{sum}-\text{mid}\times\text{len}。$$

Problem L - 贪吃的猪

- 令 $b[i] = A[i] - mid$，则上式右边是子段 $b[l..r]$ 的和。所以只需判断是否存在一个非空连续子段（不能包含第一和最后一个元素，即下标范围 $2 \sim n - 1$）使得其和 $sum \geq total - mid \times n$。
- 这转化为一个标准的最大子段和问题。若最大子段和 $\geq$ 该阈值，则 mid 可行；否则不可行。
- 二分下界取 0（或最小售价），上界取最大售价，迭代约 50 次（精度 10^{-4}）即可得到答案。
- 注意特判 $n = 2$ 时无法删除，直接输出原平均。
- 复杂度： $O(50 \times n)$

Problem B - 保卫萝卜

题目大意

- 给定一个 DAG（有向无环图），节点 1 是源点，所有节点从 1 可达。边方向从高海拔（小编号）到低海拔（大编号），即 $u < v$。兔子从某些给定节点出发，逆流而上（即沿反向边）走向 1。我们要选择一个节点作为拦截点，使得所有兔子无论走哪条逆流路径（即所有可能的反向路径）都必须经过该节点。
- 关键词：LCA 最近公共祖先，支配树

Problem B - 保卫萝卜

- 一个节点能拦截所有兔子，当且仅当它位于每只兔子所有逆流路径的交集上，即它是所有投放节点的公共必经点。
- 对于有向无环图，可以构建支配树（DominatorTree），其中根为 1。支配树中节点 u 的所有祖先都是 u 的必经点 (支配点)。多个节点的公共必经点就是它们在支配树上的最近公共祖先 LCA。
- 对支配树进行倍增预处理，同时维护每个节点的倍增数组。
- 对于每个询问，求出给定节点集合在支配树上的 LCA（可逐个求，两两 LCA)，然后查询从根到该 LCA 路径上的最大编号，输出即可。
- 复杂度： $O(\ (n+m)\times \log n\ +\ \sum k\times \log n\ )$

Problem E - 和异位

题目大意

- 给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图，每条边有非负整数权值。定义一条路径的权值为路径上所有边权的异或和。现有 q 次询问，每次给出两个点 s 和 t，求从 s 到 t 的所有路径中，权值的最小值。
- 关键词：线性基，前缀异或树

Problem E - 和异位

- 在无向图中，任意一条从 s 到 t 的路径的异或和，都可以表示为 **树上 s 到 t 的路径异或和**与 **若干环的异或和**的异或。这是因为从 s 出发，沿树走到 t，途中若偏离树边进入环，再返回树，实际上会在原路径上额外异或上环的异或值。因此所有可能的路径异或值构成一个集合：

$$(\mathrm{dist}_s \otimes \mathrm{dist}_t\ ) \otimes y \mid y \in \text{环异或值张成的线性空间}$$

，其中 dist_u 表示从根到 u 的树边异或和。

Problem E - 和异位

- 固定 $x = \mathrm{dist_s} \otimes \mathrm{dist_t}$，我们需要找到 y 属于环的线性空间，使得 $x \otimes y$ 最小。这等价于：给定一个数 x 和一个线性基，求 x 与线性基中元素异或能得到的最小值。经典贪心做法是：从高位到低位，若 x 当前位为 1 且线性基中有这一位的基，则 $x \otimes = \mathrm{base}[i]$，最终 x 即为答案。

Problem E - 和异位

- 任选根（如 1），DFS 构建一棵生成树，同时计算每个节点到根的异或距离 dist_u。
- 遍历所有边，对于非树边（包括重边），计算环的异或值

$$\mathrm{val} = \mathrm{dist}_u \otimes \mathrm{dist}_v \otimes w$$

  ，并将其插入线性基。
- 对于每个询问 (s, t)，令 $x = \mathrm{dist}_s \otimes \mathrm{dist}_t$，然后利用线性基将 x 化为最小值：从高位向低位（如 60 到 0），若 x 的第 i 位为 1 且线性基中有第 i 位的基，则 $x \otimes = \mathrm{base}[i]$。最终输出 x。
- 复杂度： $O(\ (n + m + q) \times 60\ )$

Problem H - 合理分配

题目大意

- 有 n 道题，难度递增（编号 $1 \sim n$）。需要给每道题赋一个整数分数 A_i，满足：

1. $1 \le A_i \le m$
2. $A_1 \le A_2 \le ... \le A_n$
2. 对于任意两个非空子集，若大小不同，则较大子集的分数和严格大于较小子集的分数和。求方案数模 998244353。

- 关键词：思维，数学，差分约束，完全背包

Problem H - 合理分配

- 设 $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。在非递减序列下，条件 3 等价于：

$$\sum_{i=1}^{k+1} A_i > \sum_{i=n-k+1}^{n} A_i$$

即最小的 $k+1$ 个数之和严格大于最大的 k 个数之和。

- 对于任意大小 $s > t$，最小可能的 s 个数的和为前 s 项和，最大可能的 t 个数的和为后 t 项和。条件 3 要求前 s 项和 $>$ 后 t 项和。特别地，取 $s = k+1$，$t = k$ 得必要性。
- 反之，若前 $k+1$ 和 $>$ 后 k 和，则对任意 $s > t$，有 $s \geq k+1$ 且 $t \leq k$，于是前 s 和 前 $k+1$ 和 $>$ 后 k 和 $\geq$ 后 t 和，充分性得证。

Problem H - 合理分配

- 考虑从全 m 的序列开始（即 $A_i = m$），每次操作选择一个前缀 $1 \sim i$，将该前缀所有元素减 1。设 c_i 表示对前缀 i 的操作次数（非负整数），则最终：

$$A_j = m - \sum_{i=j}^{n} c_i$$

由于每次操作保持非递减性，且每个 $A_j \geq 1$ 等价于 $\sum_{i=j}^{n} c_i \leq m - 1$。最严格的是 $j = 1$，即总操作次数 $T = \sum_{i=1}^{n} c_i \leq m - 1$。反之，给定一组满足 $T \leq m - 1$ 的非负整数 $c_1, \ldots, c_n$，按上述公式生成的序列必满足 $1 \leq A_j \leq m$ 且非递减。映射 $(c_i) \leftrightarrow (A_i)$ 是双射（由 $c_j = A_j - A_{j+1}$ 恢复，其中 $A_{n+1} = 0$）。

Problem H - 合理分配

- 定义

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k+1} A_i - \sum_{i=n-k+1}^{n} A_i$$

初始全 m 时 $\Delta_0 = (k+1)m - km = m$。对前缀 i 操作一次，会使 $A_1, \ldots, A_i$ 各减 1，从而 Δ 减少：

$$w_i = \#\{j \le i \mid j \le k+1\} - \#\{j \le i \mid j > n-k\}$$

Problem H - 合理分配

- 计算得：

$$w_i = \begin{cases} i, & 1 \le i \le k+1 \\ k+1, & k+1 < i \le n-k \\ n+1-i, & n-k < i \le n \end{cases}$$

其中当 n 为奇数时 $n-k=k+1$，第二段为空。显然 $w_i \ge 1$，且 $\sum w_i c_i$ 为总减少量。最终 $\Delta = m - \sum w_i c_i$，条件 $\Delta > 0$ 等价于

$$\sum_{i=1}^{n} w_i c_i \le m-1$$

Problem H - 合理分配

- 由于 $T=\sum c_i \le \sum w_i c_i \le m-1$，自动满足 $A_j \ge 1$。因此所有合法序列一一对应于非负整数解 $(c_1,\ldots,c_n)$ 满足 $\sum w_i c_i \le m-1$。每个 c_i 可以取任意非负整数，物品 i 的重量为 w_i，无限数量，求总重量不超过 $m-1$ 的方案数。
- 设 $dp[x]$ 表示总重量恰好为 x 的方案数，则完全背包转移：

$$dp[0]=1,\quad dp[x]=\sum_{i=1}^{n} dp[x-w_i] \quad (\text{顺序无关，一维正序更新})$$

答案：

$$\mathsf{ans}=\sum_{x=0}^{m-1} dp[x] \pmod{998244353}$$

- 复杂度： $O(\ n\times m\ )$