



树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

# 树状数组

## 题目选讲

河南省实验中学信息技术组

2026年04月24日



# 知识回顾

## 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

- 树状数组
- 权值树状数组

## 例题

数星星  
波兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

## 练习



## 【例】数星星

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

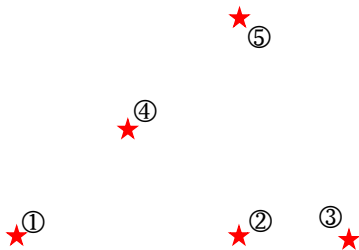
数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【题目描述】

天空有一些星星，星星都在不同的位置且有坐标。

如果一颗星星的左下方(包含正左和正下)有  $k$  颗星星，就说这颗星星是  $k$  级的。



如上面图中，星星 5 是 3 级的 (1, 2, 4 在它左下)。

星星 1 是 0 级，星星 2 是 1 级，星星 3 是 2 级，星星 4 是 1 级。

给定星星的位置，计算各级星星的数目。



## 【例】数星星

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
波兰图论  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【输入格式】

第一行一个正整数  $n$  ( $n \leq 15000$ )。

接下来  $n$  行，每行两个整数  $x, y$  ( $0 \leq x, y \leq 32000$ ) 表示星星的坐标。输入保证不会有星星重叠，星星按照  $y$  坐标递增给出， $y$  坐标相同的按照  $x$  坐标递增给出。

### 【输出格式】

输出共  $n$  行，分别表示第 0 级、第 1 级、...、第  $n-1$  级的星星数目。

### 【样例输入】

```
5
1 1
5 1
7 1
3 3
5 5
```

### 【样例输出】

```
1
2
1
1
0
```



## 【例】数星星

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
接龙图猜  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 星星的坐标按照  $y$  坐标递增给出， $y$  坐标相同的按照  $x$  坐标递增给出。
- 那么对于第  $i$  颗星星  $(x_i, y_i)$ ，它前面的所有星星的纵坐标都  $\leq y_i$ ，所以它的级别就是前面给出的星星中  $x$  坐标  $\leq x_i$  的星星数目。
- 定义树状数组，维护同一个  $x$  坐标上的星星数。
- 对于第  $i$  颗星星  $(x_i, y_i)$ ，显然它的级别为  $ask(x_i)$ 。
- 树状数组上记录横坐标  $x_i$  上多了一颗星星，即  $add(x_i, 1)$ 。
- 注意：星星的坐标可能包含 0，可以将所有星星的横纵坐标都加 1。

```
1 for(int i = 1; i <= n; ++i) ++x[i], ++y[i];
2 for(int i = 1; i <= n; ++i)
3 {
4     ++ans[ask(x[i])];
5     add(x[i], 1);
6 }
```

- 时间复杂度： $O(N \log M)$ ， $M$  为坐标范围。



## 【例】楼兰图腾

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
楼兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【题目描述】

在完成了分配任务之后，西部 314 来到了楼兰古城的西部。相传很久以前这片土地上（比楼兰古城还早）生活着两个部落，一个部落崇拜尖刀（‘V’），一个部落崇拜铁锹（‘Λ’），他们分别用‘V’和‘Λ’的形状来代表各自部落的图腾。

西部 314 在楼兰古城的下面发现了一幅巨大的壁画，壁画上被标记出了  $n$  个点，经测量发现这  $n$  个点的水平位置和竖直位置是两两不同的。西部 314 认为这幅壁画所包含的信息与这  $n$  个点的相对位置有关，因此不妨设坐标分别为  $(1, y_1), (2, y_2), \dots, (n, y_n)$ ，其中  $y_1 \sim y_n$  是 1 到  $n$  的一个排列。

西部 314 打算研究这幅壁画中包含着多少个图腾，其中‘V’图腾的定义如下  $1 \leq i < j < k \leq n$  且  $y_i > y_j, y_j < y_k$ ；而崇拜‘Λ’的部落的图腾被定义为  $1 \leq i < j < k \leq n$  且  $y_i < y_j, y_j > y_k$ （注意：图腾的形式只和这三个纵坐标的相对大小排列顺序有关）；

西部 314 想知道，这  $n$  个点中两个部落图腾的数目。因此，你需要编写一个程序来求出‘V’的个数和‘Λ’的个数。



## 【例】楼兰图腾

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
楼兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【输入格式】

第一行一个正整数  $n$ 。

第二行是  $n$  个正整数，分别代表  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。

### 【输出格式】

输出两个数，中间用空格隔开，依次为 ‘V’ 的个数和 ‘Λ’ 的个数。

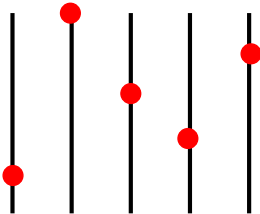
### 【样例输入】

```
5  
1 5 3 2 4
```

### 【样例输出】

```
3 4
```

### 【样例解释】





## 【例】楼兰图腾

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
楼兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 输入点的横坐标默认为  $1, 2, \dots, n$ ，纵坐标则为  $1 \sim n$  的排列。
- 按照顺序枚举三个点  $1 \leq i < j < k \leq n$ ，判断：
  - 如果  $y_i > y_j, y_j < y_k$ ，则将 ‘V’ 的个数加 1；
  - 如果  $y_i < y_j, y_j > y_k$ ，则将 ‘Λ’ 的个数加 1。
- 时间复杂度： $O(N^3)$ 。



## 【例】楼兰图腾

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
楼兰图腾

Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 以求解‘ $\Lambda$ ’为例，考虑枚举中间顶点  $j$ ：
  - 统计出其左侧比  $y_j$  小的数的个数为  $ls_j$ ；
  - 统计出其右侧比  $y_j$  小的数的个数为  $rs_j$ 。
- 那么顶点  $j$  构成的‘ $\Lambda$ ’的个数为  $ls_j \times rs_j$ 。
- 构成‘ $\Lambda$ ’的总个数为  $\sum_{j=1}^n ls_j \times rs_j$ ；求解‘ $V$ ’可以依此类推。
- 时间复杂度： $O(N^2)$ 。



## 【例】楼兰图腾

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
楼兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 对于中间的顶点  $j$ ，它与其右侧比  $y_j$  小的数实际上构成了逆序对。
- 定义树状数组维护每一个纵坐标出现的星星数，有星星存储为 1，初始时全为 0。
- 正序遍历星星序列，对于当前星星  $(x_j, y_j)$ ：
  - 前面星星中纵坐标比其小的星星数显然为  $ls_j = ask(y_j - 1)$ ；
  - 在树状数组中执行单点修改操作  $add(y_j, 1)$ 。
- 其右侧比其小的数的个数为  $rs_j = y_j - 1 - ls_j$ ，其左侧侧比其大的数的个数为  $lb_j = j - 1 - ls_j$ ，其右侧比其大的数的个数为  $rb_j = n - y_j - lb_j$ 。
- 构成 ‘ $\Lambda$ ’ 的总个数为  $\sum_{j=1}^n ls_j \times rs_j$ ，构成 ‘ $V$ ’ 的总个数为  $\sum_{j=1}^n lb_j \times rb_j$ 。
- 时间复杂度： $O(N \log N)$ 。



## 【例】楼兰图腾

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
楼兰图腾

Lost Cows

树上操作

冒泡排序

移动电话

练习

```
1 for(int i = 1; i <= n; ++i)
2 {
3     ls[i] = ask(y[i] - 1);
4     rs[i] = y[i] - 1 - ls[i];
5     lb[i] = i - 1 - ls[i];
6     rb[i] = n - y[i] - lb[i];
7     add(y[i], 1);
8 }
9 long long V = 0, A = 0;
10 for(int i = 1; i <= n; ++i) V += lb[i] * rb[i], A += ls[i] * rs[i];
```



## 【例】Lost Cows

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
波兰图论  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【题目描述】

有  $n$  头奶牛，它们的身高为  $1 \sim n$  且各不相同，但不知道每头奶牛的具体身高。这  $n$  头奶牛站成一列，第  $i$  头牛前面有  $a_i$  头牛比它低，求每头奶牛的身高。

### 【输入格式】

第一行一个正整数  $n$  ( $n \leq 10^5$ )。

第二行是  $n - 1$  个正整数，第  $i$  个数字表示第  $i + 1$  头牛前面有多少牛比它低。因为第 1 头牛前面没有牛，所以并没有将它列出。

### 【输出格式】

输入一行  $n$  个整数，其中第  $i$  个数表示第  $i$  头牛的身高。

### 【样例输入】

```
5
1 2 1 0
```

### 【样例输出】

```
2 4 5 3 1
```



## 【例】Lost Cows

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
楼兰图腾

Lost Cows

树上操作

冒泡排序

移动电话

### 练习

- 对于最后一头牛，前面有  $a_n$  头牛比它低，那么它的身高  $h_n = a_n + 1$ 。
- 对于倒数第二头牛，前面有  $a_{n-1}$  头牛比它低，那么：
  - 如果  $a_{n-1} < a_n$ ，那么它的身高  $h_{n-1} = a_{n-1} + 1$ 。
  - 如果  $a_{n-1} \geq a_n$ ，那么它的身高  $h_{n-1} = a_{n-1} + 2$ 。
- 依此类推，如果第  $i$  头牛前面有  $a_i$  头比它低，那么它的身高  $h_i$  是数字  $1 \sim n$  中第  $a_i + 1$  小的没有在  $h_{i+1}, h_{i+2}, \dots, h_n$  中出现的数字。
- 建立一个长度为  $n$  的 01 序列  $b$ ，初始时全部为 1，表示每个身高都还没安排到对应的牛。
- 然后从第  $n$  头牛到第 1 头牛，对每个  $a_i$  执行如下操作：
  - 查询序列  $b$  中第  $a_i + 1$  个 1 在什么位置，这个位置就是第  $i$  头奶牛的身高  $h_i$ 。
  - 将  $b[h_i]$  减 1 (从 1 变为 0)。



## 【例】Lost Cows

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
接龙图猜  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 树状数组 + 二分
- 可以利用树状数组  $f$  维护  $b$  的前缀和。
- 对于枚举第  $i$  头牛时，利用二分答案，通过  $ask(m)$  即可得到  $b$  中位置  $m$  前有多少个 1，那么找到  $ask(m) \geq a_i + 1$  的最小的位置即可。

```
1 for(int i = n; i >= 1; --i)
2 {
3     int l = 1, r = n;
4     while(l < r)
5     {
6         int m = (l + r) / 2;
7         if(ask(m) >= a[i] + 1) r = m;
8         else l = m + 1;
9     }
10    h[i] = l;
11    add(l, -1);
12 }
```

- 时间复杂度:  $O(N \log^2 N)$ 。



## 【例】Lost Cows

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
接龙图猜  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 树状数组 + 倍增
- 可以利用树状数组  $f$  维护  $b$  的前缀和。
- 对于枚举第  $i$  头牛时：
  - 定义  $ans = 0, sum = 0$ ,  $sum$  表示前缀和。
  - 从  $\log n$  (下取整) 到 0 考虑每个整数  $p$ 。对于每个  $p$ , 若  $ans + 2^p \leq n$  且  $sum + f[ans + 2^p] \leq a_i$ , 则令  $sum += f[ans + 2^p], ans += 2^p$ 。
  - 最后,  $h_i = ans + 1$ 。

```
1 int m = (int)(log(n) / log(2));
2 for(int i = n; i >= 1; --i)
3 {
4     int ans = 0, sum = 0;
5     for(int p = m; p >= 0; --p)
6     {
7         int k = ans + (1 << p);
8         if(k <= n && sum + f[k] <= a[i]) sum += f[k], ans = k;
9     }
10    h[i] = ans + 1;
11    add(h[i], -1);
12 }
```

- 时间复杂度:  $O(N \log N)$ 。



## 【例】树上操作

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

### 【题目描述】

给定一棵有  $n$  个结点的有根树，树根编号为 1，每个结点都有初始权值，你需要实现如下操作：

- $C \ x \ y$ ，将结点  $x$  的编号的权值增加  $y$ ；
- $Q \ x$ ，查询以  $x$  为根的子树的结点权值之和。

### 【输入格式】

一行两个整数  $n, m$ ，表示树结点数和操作数。

接下来一行  $n$  个整数，表示结点初始状态下的权值。

接下来  $n - 1$  行，每行两个整数  $x, y$ ，表示  $x, y$  之间有一条边。

接下来  $m$  行，每行一个操作。

### 【输出格式】

对于每个查询操作，输出以  $x$  为根的子树的结点权值之和。

### 【数据范围】

对于 60% 的数据， $1 \leq n, m \leq 10^4$ 。

对于 100% 的数据， $1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5$ ，保证所有输入的权值在  $[-1000, 1000]$ 。



## 【例】树上操作

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

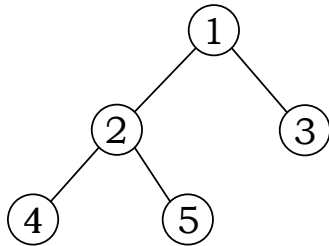
### 练习

### 【样例输入】

```
5 5
2 3 7 5 1
1 2
1 3
2 4
2 5
Q 2
C 4 6
Q 2
C 3 5
Q 1
```

### 【样例输出】

```
9
15
29
```





## 【例】树上操作

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 对于修改，直接修改结点权值即可。
- 对于查询，需要查询子树中所有结点的权值。
- 时间复杂度： $O(NM)$ 。



## 【例】树上操作

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
接龙图猜  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 主要在与查询子树的权值和，可以利用 DFS 序将子树的结点变成一个区间。
- 定义  $dfn[x]$  表示结点  $x$  的 DFS 序，定义  $sz[x]$  表示以  $x$  为根的子树大小。
- 对于查询操作，只需要查询  $[dfn[x], dfn[x] + sz[x] - 1]$  的区间和即可。
- 对于修改操作，单点修改  $dfn[x]$  的权值即可。

```
1 dfs(1, 0); // 求 DFS 序和子树大小
2 for(int i = 1; i <= n; ++i) add(dfn[i], a[i]);
3 // 操作
4 char op[5]; scanf("%s", op);
5 if(op[0] == 'C')
6 {
7     int x, y; scanf("%d%d", &x, &y);
8     add(dfn[x], y);
9 }
10 else
11 {
12     int x; scanf("%d", &x);
13     printf("%lld\n", ask(dfn[x] + sz[x] - 1) - ask(dfn[x] - 1));
14 }
```

- 查询和修改的时间复杂度： $O(\log N)$ ，整体的时间复杂度： $O(M \log N)$ 。



## 【例】冒泡排序

给定一个  $1 \sim n$  的排列<sup>1</sup> $a$ ，接下来有  $m$  次操作，操作共两种：

- ① 交换操作：给定  $x$ ，将当前排列中的第  $x$  个数与第  $x + 1$  个数交换位置。
- ② 询问操作：给定  $k$ ，请你求出当前排列经过  $k$  轮冒泡排序后的逆序对个数。

对一个长度为  $n$  的排列  $a$  进行一轮冒泡排序的伪代码如下：

```
for i = 1 to n - 1:
    if a[i] > a[i + 1]:
        swap(a[i], a[i + 1])
```

---

<sup>1</sup> $1 \sim n$  的全排列中的任意一个。



## 【例】冒泡排序

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【输入格式】

第一行两个整数  $n, m$  ( $n, m \leq 2 \times 10^5$ ), 表示排列长度与操作个数。

第二行  $n$  个整数表示排列  $a$ 。

接下来  $m$  行每行两个整数  $t_i, c_i$ , 描述一次操作: 若  $t_1 = 1$ , 则本次操作是交换操作,  $x = c_i (1 \leq x < n)$ ; 若  $t_i = 2$ , 则本次操作是询问操作,  $k = c_i (0 \leq k < 2^{32})$ 。

### 【输出格式】

对于每次询问操作输出一行一个整数表示答案。



## 【例】冒泡排序

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
波兰图论  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【样例输入】

```
3 6
1 2 3
2 0
1 1
1 2
2 0
2 1
2 2
```

### 【样例输出】

```
0
2
1
0
```

### 【样例解释】

- 第一次操作：排列为  $\{1, 2, 3\}$ ，经过 0 轮冒泡排序后为  $\{1, 2, 3\}$ ，0 个逆序对。
- 第二次操作：排列变为  $\{2, 1, 3\}$ 。
- 第三次操作：排列变为  $\{2, 3, 1\}$ 。
- 第四次操作：经过 0 轮冒泡排序后排列变为  $\{2, 3, 1\}$ ，2 个逆序对。
- 第五次操作：经过 1 轮冒泡排序后排列变为  $\{2, 1, 3\}$ ，1 个逆序对。
- 第六次操作：经过 2 轮冒泡排序后排列变为  $\{1, 2, 3\}$ ，0 个逆序对。



## 【例】冒泡排序

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 模拟
- 对于交换操作，交换  $a[x]$  和  $a[x + 1]$  即可。
- 对于询问操作，按照题目要求执行  $k$  轮冒泡排序，然后利用归并排序算法或树状数组求解逆序对数。
- 注意，执行冒泡排序时复制原数组到临时数组。
- 时间复杂度： $O(M(N^2 + N \log N))$ 。



## 【例】冒泡排序

- 定义  $b[i]$  表示在  $a[i]$  前比  $a[i]$  大的元素个数，即  $a[i]$  对于逆序对数的贡献。
- 那么我们有如下结论：
  - 序列  $a$  的逆序对数为  $\sum_{i=1}^n b[i]$ 。
  - 交换  $a[x]$  和  $a[x+1]$  时，只有一个元素的逆序对发生变化。
  - 每进行一轮冒泡排序，对于  $b[i] > 0$  的元素，在序列中向左移动一位且  $b[i] = b[i] - 1$ 。

原始 $a$	8	3	6	10	5	7	4	9	2	1
第一轮冒泡后 $a$	3	6	8	5	7	4	9	2	1	10
第二轮冒泡后 $a$	3	6	5	7	4	8	2	1	9	10

原始 $b$	0	1	1	0	3	2	5	1	8	9
第一轮冒泡后 $b$	0	0	0	2	1	4	0	7	8	0
第二轮冒泡后 $b$	0	0	1	0	3	0	6	7	0	0

图:  $n = 10$  进行两轮冒泡排序的情况

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习



## 【例】冒泡排序

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 利用树状数组求出原始序列对应的数组  $b$ 。定义树状数组  $f$ ，初始化为 0；正序扫描序列  $a$ ，对于每个元素  $a[i]$ ：
  - 在树状数组中查询前缀和  $t = [1, a[i] - 1]$  表示  $a[i]$  前比  $a[i]$  小的元素个数，令  $b[i] = i - 1 - t$ ；
  - 在树状数组中执行单点增加操作  $add(a[i], 1)$ ，表示数值  $a[i]$  出现了。
- 对于交换操作，根据  $a[x]$  与  $a[x + 1]$  的大小：
  - 如果  $a[x] < a[x + 1]$ ，那么交换后  $b[x + 1]$  要加 1。
  - 如果  $a[x] > a[x + 1]$ ，那么交换后  $b[x]$  要减 1。
- 对于询问操作，进行  $k$  轮冒泡排序后，只有  $b[i] > k$  的  $b[i]$  值才有能对逆序对数有贡献，即  $ans = \sum_{i=1}^n (b[i] - k), b[i] > k$ 。所以，遍历数组  $b$ ，按照上述公式累加即可得出答案。
- 时间复杂度： $O(N \log N + MN)$ 。



## 【例】冒泡排序

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

```
1 // 求解 b 数组
2 for (int i = 1; i <= n; ++i)
3 {
4     b[i] = i - 1 - ask(a[i] - 1);
5     add(a[i], 1);
6 }
7 // 交换操作 为了避免混乱 在交换前处理 b 数组
8 if (a[x] < a[x + 1]) ++b[x];
9 else if (a[x] > a[x + 1]) --b[x + 1];
10 swap(a[x], a[x + 1]);
11 swap(b[x], b[x + 1]);
12
13 // 查询
14 long long ans = 0;
15 // 冒泡排序最多进行 n-1 轮
16 if(k < n) for(int i = 1; i <= n; ++i) ans += max(b[i] - k, 0ll);
```



## 【例】冒泡排序

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
接龙图猜  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

- 进行  $k$  轮冒泡排序后，只有  $b[i] > k$  的  $b[i]$  值才有能对逆序对数有贡献，即

$$ans = \sum_{i=1}^n (b[i] - k) = \sum_{i=1, b[i]>k}^n b[i] - k \times \sum_{i=1}^n (b[i] > k)$$

也就是所有  $b[i] > k$  的  $b[i]$  的和减去  $b[i] > k$  的  $b[i]$  的个数乘以  $k$ 。

- 定义树状数组  $c$  和  $d$  分别维护  $b[i]$  出现的次数和值为  $b[i]$  的元素的和。
- 求解原始序列的  $b[i]$  值时，在树状数组执行单点增加  $add(c, b[i], 1)$  和  $add(d, b[i], b[i])$ 。

```
1 // 求解 b,c,d 数组
2 for (int i = 1; i <= n; ++i)
3 {
4     b[i] = i - 1 - ask(f, a[i] - 1);
5     add(f, a[i], 1);
6     add(c, b[i], 1); // b[i] 出现次数加 1
7     add(d, b[i], b[i]); // 与 b[i] 值相同的元素总和加 b[i]
8 }
```



## 【例】冒泡排序

- 对于交换操作，根据  $a[x]$  与  $a[x + 1]$  的大小：
  - 如果  $a[x] < a[x + 1]$ ，那么交换后值为  $b[x + 1]$  的少 1，值为  $b[x + 1] + 1$  的多 1。
  - 如果  $a[x] > a[x + 1]$ ，那么交换后值为  $b[x]$  的少 1，值为  $b[x] - 1$  的多 1。

```
1 // 交换操作 为了避免混乱 在交换前处理 b 数组
2 if(a[x] < a[x + 1])
3 {
4     add(c, b[x], -1), add(d, b[x], -b[x]); // b[x] 少 1 个
5     add(c, b[x] + 1, 1), add(d, b[x] + 1, b[x] + 1); // b[x]+1 多 1 个
6     ++b[x];
7 }
8 else if(a[x] > a[x + 1])
9 {
10    add(c, b[x + 1], -1), add(d, b[x + 1], -b[x + 1]); // b[x+1] 少 1 个
11    add(c, b[x + 1] - 1, 1), add(d, b[x + 1] - 1, b[x + 1] - 1); // b[x+1]-1 多 1 个
12    --b[x + 1];
13 }
14 swap(a[x], a[x + 1]);
15 swap(b[x], b[x + 1]);
```

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星

埃及图腾

Lost Cows

树上操作

冒泡排序

移动电话

练习



## 【例】冒泡排序

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

- 对于询问操作，进行  $k$  轮冒泡排序后，只有  $b[i] > k$  的  $b[i]$  值才有能对逆序对数有贡献：
  - 在  $d$  查询区间和  $[k + 1, n]$  表示大于  $k$  的所有  $b[i]$  的和  $sum$ 。
  - 在  $c$  查询区间和  $[k + 1, n]$  表示大于  $k$  的所有  $b[i]$  的总次数  $cnt$ 。
  - 则答案  $ans = sum - cnt * k$ 。

```
1 // 询问操作
2 long long ans = 0;
3 if(k < n) // 冒泡排序最多进行 n-1 轮
4 {
5     // k 轮后只有逆序对数大于 k 的才有用
6     long long sum = ask(d, n) - ask(d, k);
7     // 逆序对数大于 k 的值 c 的个数
8     long long cnt = ask(c, n) - ask(c, k);
9     // 逆序对数大于 k 的值中每个都减去 k
10    ans = sum - cnt * k;
11 }
```

- 时间复杂度： $O(N \log N + M \log N)$ 。



## 【例】移动电话

树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

练习

### 【题目描述】

移动电话的基站区域分为若干个正方形单元格，形成了一个  $S \times S$  的矩阵，行和列的编号为  $0 \sim S - 1$ ，每个单元都包含一个基站。一个单元内活动的手机的数量可能会发生变化，因为一部手机可能从一个单元移动到另一个单元，或手机开机、关机。基站会向总站报告自己的坐标和活动的手机数量变化情况，请你编写程序维护手机数目的变化情况。

### 【输入格式】

输入包含若干行，每行一个指令，指令格式如下：

- $0\ S$ ，表示初始化一个  $S \times S$  的全零矩阵。这个指令只会出现一次，即第一条指令。
- $1\ X\ Y\ A$ ，表示  $(X, Y)$  单元的活动手机数增加  $A$ ， $A$  为正数或负数。
- $2\ L\ B\ R\ T$ ，查询坐标  $(X, Y)$  满足  $L \leq X \leq R, B \leq Y \leq T$  的所有单元活动手机总数。
- $3$ ，这个指令只会出现一次，即最后一条指令。



## 【例】移动电话

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

### 【输出格式】

对于每个指令 2，输出一行一个正整数，即该指令的答案。

### 【样例输入】

```
0 4
1 1 2 3
2 0 0 2 2
1 1 1 2
1 1 2 -1
2 1 1 2 3
3
```

### 【样例输出】

```
3 4
```

### 【数据范围与约定】

输入保证  $1 \leq S \leq 1024$ ，任意时刻单元格中激活手机数量在  $[0, 32767]$ ，单元格中手机的变化量在  $[-32768, 32767]$ ，质量总数不超过 60002，所有格子的最多活动电话总数不超过  $2^{30}$ 。



## 【例】移动电话

### 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 二位树状数组维护单元的活动电话数。
- 注意：为了方便，可以将单元格行列坐标都加 1。
- 对于指令 1，执行  $\text{add}(x + 1, y + 1, a)$  即可。
- 对于指令 2，树状数组查询二维前缀和，求解矩形之和即可。



# 练习

## 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
楼兰图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- 数星星 (COGS 3487)
- 人工湖 (COGS 1697)
- 全排列逆序对个数 (COGS 1750)
- 公路交叉 (COGS 1974)
- 奶牛排队 (COGS 1975)
- 楼兰图腾 (COGS 3405)
- 三元上升子序列 (COGS 4298)
- 公路交叉 (COGS 1974)
- 树上操作 A (COGS 3403)
- 苹果树 (COGS 1832)



# 练习

## 树状数组

河南省实验中学  
信息技术组

### 例题

数星星  
埃及图腾  
Lost Cows  
树上操作  
冒泡排序  
移动电话

### 练习

- Lost Cows(COGS 3406)
- 排队买票 (COGS 3482)
- 奶牛集会 (COGS 3297)
- 冒泡排序 [NOI Online 2020](COGS 3373)
- 猴猴的比赛 (COGS 4083)
- 移动电话 [IOI 2001](COGS 1532)